

Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka

Branko Štrbac
Miodrag Hadžistević

METODE PLANIRANJA I OBRADE EKSPERIMENTA

PRAKTIKUM

Novi Sad, 2023.

Predgovor

Publikacija Metode planiranja i obrade eksperimenta predstavlja rezultat dugogodišnjih istraživačkih napora autora u oblasti primene statističkih metoda u kontroli kvaliteta, dizajniranju eksperimenata i analizi mernih sistema. Publikacija kao takva predstavlja svojevrsno delo koje obrađuje širi spektar aktuelnih istraživačkih i industrijskih tema u ovoj oblasti. Autori su nastavili put koji su utrli prof. dr Jelena Stankov, prof. dr Sava Sekulić, prof. dr Janko Hodolić i prof. dr Pavel Kovač. Za razliku od predhodnih publikacija koje su obrađivale ovu temu, predstavljena se ističe po tome da, pored teoretskih znanja, kroz sva poglavlja daje rešene primere u jednom od najčešće korišćenih softvera za statističku analizu-Minitab. Takođe, po prvi put se obrađuje oblast analize mernih sistema. Većina primera su eksperimenti koje su autori postavili, sproveli i obradili u okviru svojih istraživanja i koji su publikovani u naučnim časopisima i konferencijama. Takođe, korišćena su eksperimentalna istraživanja od kolega sa Departmanu za proizvodno mašinstvo Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu i istraživanja objavljena u prestižnim naučnim časopisima koja su autori dodatno obradili u Minitabu. Treba takođe napomenuti da je deo prezentovanih rezultata preuzet iz praktičnih industrijskih problema tokom saradnje autora sa privrednom u cilju edukacije zaposelnih i rešavanju praktičnih tema obrađenih u ovoj publikaciji.

Metode planiranja i obrade eksperimentom su prvenstveno namenjene kao literatura za istoimeni predmet na četvrtoj godini studija na smeru Proizvodno mašinstvo na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Autori se iskreno nadaju da će publikacija svojom sadržinom zainteresovani studente, israživače, inžinjere šireg spektra ne samo tehničkih nauka već i ostalih nauka gde postoji potreba za planiranjem i analizom eksperimenta. Izdavanje ove publikacije je podržalo Ministarstvo nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Republike Srbije u okviru projekta „Razvoj visokog obrazovanja“.

Veći broj kolega je doprineo da ova publikacija ugleda svetlost dana. Autori posebnu zahvalnost iskazuju recenzentima dr Milenku Sekuliću, redovnom profesoru na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu i dr Predragu Jankoviću, redovnom profesoru na Mašinskom fakultetu u Nišu na korisnim primedbama i sugestijama u vezi sa poboljšanjem teksta

publikacije. Veliki doprinos u tehničkoj pripremi teksta i slika dao je asistent Miloš Ranisavljev kome su autori neizmerno zahvalni. Poseban doprinos u stručnom delu dali su kolege Vanr. prof. dr Borislav Savković i Doc. dr Dragan Rodić čija su znanja, iskustva i istraživanja autori koristili za oblast dizajn eksperimenta na čemu im se autori srdačno zahvaljuju. Takođe, autori se zahvaljuju svima onima koji su na bilo koji način doprineli da se izda ova publikacija.

Autori

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE PODATAKA	3
2.1. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE PODATAKA - TIPOVI	4
2.1.1. Scatter plot – dijagram rasipanja	4
2.1.2. Line plot – Linijski dijagram	5
2.1.3. Bar charts – trakasti dijagrami	6
2.1.4. Površinski dijagrami	7
2.1.5. Histogram	8
2.1.6. Box – plot dijagram	9
2.1.7. Kružni – pita dijagram	10
2.2. KREIRANJE DIJAGRAMA U SOFTVERSKOM PAKETU MINITAB	11
3. DESKRIPTIVNA STATISTIKA, REGRESIONA ANALIZA I KORELACIJA	28
3.1. DESKRIPTIVNA (OPISNA) STATISTIKA	28
3.1.1. Normalna raspodela	30
3.1.2. Primer deskriptivne statistike u Minitabu	32
3.2. REGRESIONA ANALIZA	38
3.2.1. Matrični pristup u višetrukoj linearnoj regresiji	41
3.2.2. Testiranje hipoteza u modelu višestruke linearne regresije	42
3.2.3. Koeficijent determinacije R^2 (adekvatnost modela)	43
3.2.4. Intervali poverenja u višetrukoj linearnoj regresiji	44
3.2.5. Primer regresione analize u Minitabu-prost linearan model	45
3.2.6. Primer regresione analize u Minitabu-višestruki linearan model	50
3.2.7. Primer regresione analize u Minitabu-kvadratni i kubni model	54
3.2.8. Nelinearna regresija	57
3.3. KORELACIJA	61
3.3.1. Primer korelacije u Minitabu	61
4. TESTIRANJE STATISTIČKIH HIPOTEZA	63
4.1. SPROVOĐENJE I VRSTE STATISTIČKIH TESTOVA	67
4.1.1. t test jednog uzorka	68
4.1.2. Upareni t test	71
4.1.3. Test poređenja dve varijanse	74
4.1.4. t test poređenja dva uzorka	79
4.2. NEPARAMETARSKI STATISTIČKI TESTOVI	83
5. ANALIZA VARIJANSE-ANOVA	87
5.1. JEDNOFAKTORNA ANOVA	89
5.2. POST ANOVA-TUKEY TEST	95
5.3. ANOVA U MINITABU	97
5.4. ANALIZA REZIDUALA	102
6. DIZAJNIRANJE EKSPERIMENTA SA NEKOLIKO FAKTORA (DOE)	104
6.1. DVOFAKTORNI EKSPERIMENTI	108
6.2. OPŠTI FAKTORNI EKSPERIMENTI	114
6.3. 2^k FAKTORNI DIZAJN	114
6.3.1. 2^2 dizajn	114
6.3.2. 2^k Faktorni dizajn za $k \geq 3$	125
6.4. METOD ODZIVNE POVRŠINE	133
6.4.1. Matematički model metode odzivne površine	135
6.4.2. Centralni kompozitni dizajn	136
6.4.3. Box – Behnken dizajn	138
6.4.4. Metod odzivne površine u Minitabu	140
6.5. TAGUĆI DIZAJN EKSPERIMENTA	169
6.5.1. Primer u Minitabu	171
7. ALATI KVALITETA	177
7.1. KONTROLNI DIJAGRAMI	178

7.1.1.	Kontrolni dijagram normalnog trenda	179
7.1.2.	Interpretacija testa za broj opservacija za medijanu.....	181
7.1.3.	Interpretacija testa za broj opservacija za gore ili dole.....	182
7.1.4.	Primer kontrolnog dijagrama u Minitabu	184
7.2.	PARETO DIJAGRAM	185
7.2.1.	Primer Pareto dijagrama u Minitabu koristeći sirove podatke	187
7.2.2.	Primer Pareto dijagrama u Minitabu koristeći brojčane vrednosti.....	188
7.2.3.	Primer Pareto dijagrama u Minitabu koji uključuje razvrstavanja u grupe	189
7.3.	DIJAGRAMI UZROČNO POSLEDIČNIH VEZA – IŠIKAVA DIJAGRAMI	189
7.3.1.	Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem uzroka za grane glavnih uzroka	191
7.3.2.	Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem pod-grana	192
7.3.3.	Dijagram uzročno posledičnih veza sa ručnim dodavanjem pod-grana.....	193
7.3.4.	Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem glavnih uzroka	194
7.4.	DIJAGRAM VIŠE PROMENLJIVIH.....	195
7.4.1.	Primer dijagrama više promenljivih u Minitabu	195
8.	ANALIZA MERNOG SISTEMA	197
8.1.	TERMINOLOGIJA U STUDIJ MSA.....	199
8.2.	VARIJACIJE MERNOG SISTEMA	202
8.3.	SPROVOĐENJE MSA STUDIJE.....	204
8.4.	ANALIZA MERNIH SISTEMA ZA NUMERIČKE KARAKTERISTIKE KVALITETA	206
8.4.1.	Studija stabilnosti mernog sistema	206
8.4.2.	Studija biasa	207
8.4.3.	Studija linearnosti.....	211
8.4.4.	Studija ponovljivosti i reproduktivnosti merila - Gage R&R.....	217
8.4.4.1.	Metoda raspona.....	217
8.4.4.2.	Metoda srednjih vrednosti i raspona.....	219
8.4.4.3.	ANOVA metoda	226
8.4.4.4.	Gage R&R studija u softverskom paketu Minitab	227
8.5.	ANALIZA MERNIH SISTEMA ZA ATRIBUTIVNE KARAKTERISTIKE KVALITETA	238
8.5.1.	Metode analize rizika.....	238
8.5.2.	Analiza hipoteze testa – metoda unakrsnih tabela.....	241
8.5.3.	Teorija otkrivanja signala	249
8.5.4.	Analitička metoda	251
	LITERATURA.....	257
	PRILOG I – F RASPODELA	265
	PRILOG II – T RASPODELA.....	269
	PRILOG III – d_2^* TABELA	270

1. Uvod

Prikupljanje i analiza podataka (rezultata merenja) su fundamentalne radnje za nauku i inženjerstvo. Podaci su činjenice koje prenose informacije iz kojih se mogu izvući određeni zaključci. Podaci sami po sebi nisu korisni, ako se iz njih ne mogu izvući informacije, koje će kasnije biti analizirane i interpretirane. Da bi informacije sadržane u podacima bile prikladne za njihovu upotrebu i da bi zaključci na osnovu tih informacija bili pouzdani, podaci moraju biti pravilno dobijeni. Naučnici otkrivaju principe koji upravljaju fizičkim svetom, a inženjeri uče kako da projektuju nove proizvode i procese, analizirajući podatke prikupljene u naučnim eksperimentima. Glavna karakteristika dobijenih naučnih podataka je njihova varijabilnost i slučajnost. Svako novo merenje može dati drugačije rezultate. Stoga se s pravom može postaviti pitanje kako onda doći do relevantnih i tačnih zaključaka, ako se rezultati pojedinačnih eksperimentalnih merenja razlikuju. U rešavanju ovog problema uloga statistike je nezamenljiva. Statistika je oblast matematike koja se bavi sakupljanjem, analizom i interpretacijom, objašnjavanjem i prezentacijom podataka. Statističke metode omogućavaju naučnicima i inženjerima da osmisle validne eksperimente i da izvuku pouzdane zaključke iz eksperimentalno dobijenih podataka.

Analiza i interpretacija podataka igra sve veću ulogu u aspektima savremenog života. Svakodnevno u svim oblastima života, prikupljaju se ogromne količine podataka o našim mišljenjima i našim stilovima života, u svrhe koje se kreću od kreiranja efikasnijih marketinških kampanja do razvoja društvenih politika dizajniranih da poboljšaju naš način života. Skoro svakog dana se objavljuju novinski članci koji analiziraju podatke koji pokušavaju da objasne društvene ili ekonomske trendove. Osnovno poznavanje statistike je stoga neophodno ne samo da biste bili efikasan naučnik ili inženjer, već i da biste bili dobro informisani član društva.

Statistika igra vitalnu ulogu u mnogim oblastima, kao što su inženjering, nauka, medicina, biznis i industrija. Svet sada prelazi iz industrijskog doba u doba informacija. Kao radnik u informatičkom dobu, od vas će se tražiti da pribavljate podatke, obrađujete podatke i donosite odluke na osnovu podataka. Poznavanje statistike je od vitalnog značaja za rešavanje ovih zadataka. Treba imati na umu da se informacije prenose podacima, a statistika je nauka o podacima.

Na kraju, za mašinske inženjere statističke tehnike mogu biti značajna pomoć u projektovanju novih proizvoda i sistema, poboljšanju postojećih proizvoda i dizajniranju, razvoju, optimizaciji i poboljšanju proizvodnih procesa. Metode planiranja i obrade eksperimenta su grana primenjene statistike, koja se bavi planiranjem, sprovođenjem, analizom i tumačenjem kontrolisanih testova za

procenu faktora koji kontrolišu vrednost parametra ili grupe parametara. Ove metode predstavljaju moćan alat za prikupljanje i analizu podataka koji se može koristiti u različitim eksperimentalnim situacijama. Primenom ovih metoda dobijaju se informacije kako npr. kako proizvodni proces funkcioniše. Mogu se koristiti za sprovođenje istraživanja, predikciju rezultata, razvoj kritičkog mišljenja i/ili donošenje odluka na osnovu informacija. Širu primenu ovih metoda podržava i nova industrijska revolucija i koncept „fabrika bez ljudi“ koje zahtevaju efikasnu obradu podataka u *on-line* režimu u cilju automatskog upravljanja.

U ovom materijalu obrađeno je sedam tematskih oblasti (poglavlja) koje su najčešća potreba onih koji sakupljaju, obrađuju i donose odluke na osnovu rezultata merenja. Pored osnovnih teoretskih znanja svaka oblast sadrži reprezentativne primere koji su obrađeni u statističkom softveru Minitab. Uglavnom statistički alati zahtevaju veoma komplikovane i dugotrajne proračune i stoga je često nezamislivo sprovoditi analize bez upotrebe softverske podrške.

Nakon uvodnog poglavlja, u drugom poglavlju dat je pregled metoda za prezentovanje statističkih podataka u vidu dijagrama (grafikona). Često je grafički prikaz veoma efikasniji i prihvatljiviji onom ko ga tumači od npr. tabela ili samo brojevnih vrednosti. Grafički prikaz podataka je neizostavan, da li kao glavni izlaz ili pomoćni, u većini statističkih metoda.

Treće poglavlje opisuje osnovne statističke pokazatelje. Takođe, obrađena je jedna od najčešće korišćenih statističkih tehnika – regresiona analiza koja se često koristi za modelovanje i optimizaciju sistema i/ili procesa. Na kraju je data korelacija sa kojom može da se odredi u kakvom su odnosu dve promenljive.

Četvrto poglavlje obrađuje testiranje statističkih hipoteza koje se koriste kada posmatrani faktor nema više od dva nivoa. U zavisnosti da li se porede srednje vrednosti ili varijanse iz populacija koje imaju normalnu raspodelu ili pak iz populacija koje nemaju normalnu raspodelu koriste se različiti statistički testovi. Takođe, dat je poseban osvrt na značaj snage statističkog testa.

Peto poglavlje opisuje analizu varijanse – ANOVU koja se koristi za testiranje statističkih hipoteza kada faktor ima više od dva nivoa ili kada je izlazna karakteristika pod uticajem dva faktora. Analiza varijanse predstavlja deo izlaz iz faktornih dizajna i regresione analize.

Šesto poglavlje obrađuje faktorne eksperimente koji se najčešće koriste pri eksperimentisanju. Obrađeni su opšti faktorni dizajni tipa 2^k , metode odzivne površine i Taguchi plan eksperimenta uz brojne primere.

Sedmo poglavlje opisuje osnove alate koji se koriste za poboljšanje kvaliteta. Dati su načini kreiranja Pareto dijagrama, Iškava dijagram, kontrolnih dijagrama i dijagrama više promenljivih.

Osmo poglavlje opisuje tahniku koja se koristi za analizu mernog sistema – prihvatljivost primene određenog mernog instrumenta za dati merni zadatak. Ova tehnika je veoma bitna jer ocenjuje kvalitet rezultata merenja koji se posle koriste u statističkim analizama.

2. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE PODATAKA

Ekperimenti se danas izvode u mnogim proizvodnim organizacijama u cilju povećanja razumevanja i znanja o različitim proizvodnim procesima. Za kontinuirano poboljšanje kvaliteta proizvoda/procesa, neophodno je razumeti ponašanje procesa, obim njegove varijabilnosti i uticaj te varijabilnosti na sam proces. U inženjerskom okruženju, eksperimenti se često sprovode radi istraživanja, procene ili potvrde nečega. Istraživanje se odnosi na razumevanje podataka iz procesa. Procena se odnosi na određivanje efekata procesnih varijabli ili faktora na karakteristiku izlaznih performansi. Potvrda implicira proveru predviđenih rezultata dobijenih eksperimentom. Zbog toga su rezultati eksperimentalnih istraživanja polazna osnova za dalju primenu moćnih statističkih metoda i tehnika. Na primer, odluka da se proizvod i/ili proces prihvati ili prilagodi (poboljša) se obično zasniva na rezultatima merenja. Nakon formiranja reprezentativnog uzorka i merenja odabranih svojstava članova tog uzorka, prikupljene podatke treba na neki način sažeti kako bi se bolje opisali, lakše razumeli i efikasnije saopštili drugima. Rezultati merenja (podaci) ili posmatrana statistička serija se mogu predstaviti na tri načina:

- Tekstualno
- Tabelarno
- Grafički

Podaci merenja, prikazani na jedan od ova tri načina, predstavljaju krajnji rezultat procesa statističkog posmatranja. Statističko posmatranje predstavlja sistematsko, naučno organizovano prikupljanje podataka o pojavama i procesima putem registracije prema unapred izrađenom programu posmatranja. Rezultati statističkog posmatranja se stavljaju na raspolaganje korisnicima kao informacije o posmatranoj statističkoj seriji (populaciji). Načini prikazivanja podataka predstavljaju osnovne statističke instrumente pomoću kojih se kasnije vrše razne statističke analize.

Nakon statističkog posmatranja podaci se dobijaju u tekstualnom formatu. Ovaj vid prikazivanja podataka je nejasnog i neobrađenog formata. Tekstualno prikazivanje podataka je koristo u slučajevima kada postoji mali broj podataka ili kada se želi da se neka kvalitativna izjava dopuni podacima. Generalno, tabelarno i grafičko prikazivanje podataka se mnogo češće koristi jer pružaju lakši i jasniji uvid u podatke.

Tabelarno prikazivanje podataka predstavlja raspored određenih vrednosti zabeleženih u tabelama tako da ih je lako čitati i upravljati njima. Prikazivanje podataka na ovaj način je istovremeno i informativno i kreativno. Ako čitalac mora da tumači mnogo podataka, onda tabelarni prikaz mora biti organizovan u formatu koji je lako čitljiv. Prednosti ovog vida

predstavljanja podataka se ogledaju u jednostavnosti predstavljanja, analize i poređenja podataka i takođe se štedi prostor i vreme čitaoca.

Grafičko predstavljanje je vizuelni prikaz podataka i statističkih analiza i često je mnogo efikasnije nego predstavljanje podataka tabelarno i/ili tekstualno. Ljudsko oko, tačnije ljudski mozak, je izuzetno vešt pri obradi vizuelnih informacija, u velikim količinama i u kompleksnim formama. To se postiže korišćenjem prečica, pretpostavljanjem i interpretacijom onoga što vidimo u odnosu na stvari koje smo ranije videli. Cilj grafičkog predstavljanja podataka je da se iskoristi moć vizuelnog prikaza za efikasno prenošenje informacija, uz izbegavanje obmane ili zabuna. Veoma je važno na koji način drugima predstavljamo podatke do kojih smo došli, kao i njihovu analizu i razumevanje. Generalno, prednosti grafičkog prikazivanja podataka su lako razumevanje i lako tumačenje, atraktivnost, korisnost u poređenju odnosa između dva ili više skupova, prikaz statističkih problema u vizuelnom obliku, itd. Grafici ili dijagrami omogućavaju da se prikažu uzorci, različite relacije i raspodele u podacima, što je inače teško uraditi jednostavnim gledanjem podataka na radnoj stranici. Odabir dijagrama zavisi od vrste podataka koji treba da se analiziraju, i šta se želi prikazati na odgovarajućem dijagramu. Neki tipovi grafičkog prikazivanja podataka spadaju u osnovne alate kvaliteta kojih ima ukupno sedam i biće razmatrani u poglavljima 6. i 7. Značaj osnovnih alata kvaliteta je prepoznao i japanski naučnik Kaoru Işikava koji je izjavio: „čak 95 % svih problema unutar kompanije može se rešiti pomoću sedam osnovnih alata kvaliteta“.

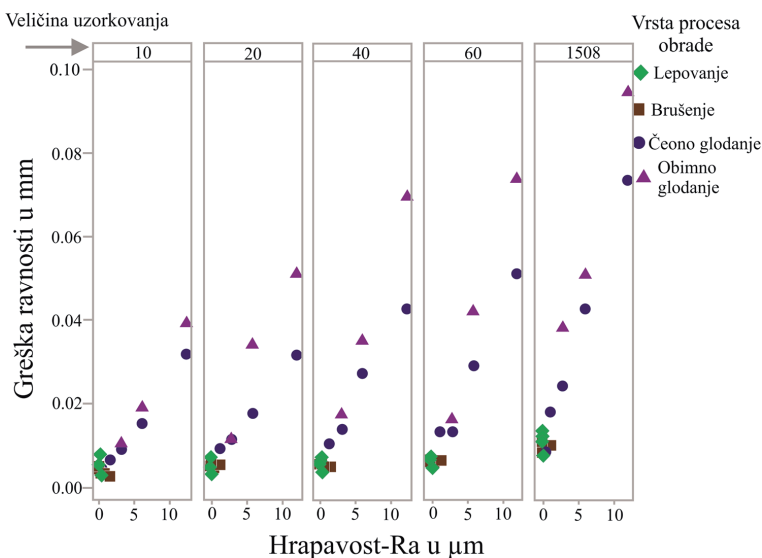
2.1. Grafičko predstavljanje podataka - tipovi

Postoji relativno mali broj tipova grafičkog prikazivanja podataka, koji se uobičajeno koriste u praksi. Većina statističkih softvera koji se koriste u praksi, nude sličan izbor dijagrama. Grafički prikaz podataka je uobičajan izlaz iz statističkih analiza kao što su testiranje hipoteza, različiti tipovi dizajna eksperimenta, analiza sposobnosti procesa, itd. Neki od dijagrama su u nastavku detaljnije opisani, a neki će biti dati u narednim poglavljima, kao deo izlaza iz različitih statističkih analiza.

2.1.1. Scatter plot – dijagram rasipanja

Ovo je osnovni tip grafičkog prikazivanja podataka koji se često koristi. Okolnosti u kojima se koristi su obično očigledne, a najčešće se ispituje veza između jedne ili više ulaznih promenljivih i izlazne promenljive. Dijagram rasipanja je veoma informativan jer su svi podaci, predstavljeni u vidu tačke, eksplicitno predstavljeni i ovo je veoma korisno u otkrivanju neuobičajenih ili ekstremnih vrednosti (eng. *outlier*) ili podataka koji prate neki šablon (eng. *pattern*). Izlazna promenljiva (eng. *response variable*) se prikazuje na y-osi, a ulazne promenljive na x-osi, zaglavljju (legendi) uz mogućnost razvrstavanja dijagrama u pod-dijagrame ako postoji više od dve ulazne promenljive. Dijagram rasipanja može da da odgovore na sledeća pitanja: koji je pravac odnosa, da li je odnos linearan ili nelinearan, da li je veza slaba, umerena ili jaka i da li postoje ekstremne vrednosti? Pravac odnosa okarakterisan kao pozitivan, znači da kako se povećava vrednost ulazne promenljive, tako se

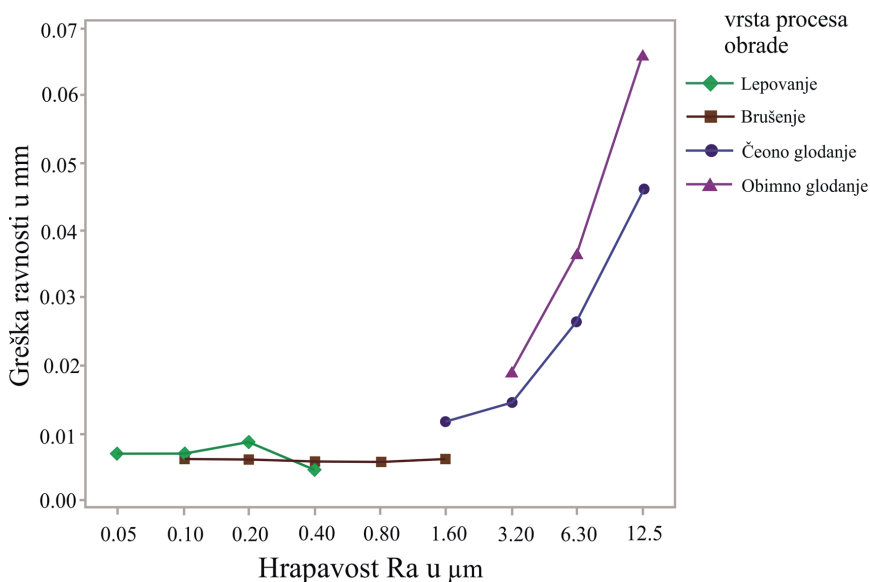
povećava i vrednost izlazne promenljive. Negativan odnos implicira da kako se vrednost ulazne promenljive povećava, tako se vrednost izlazne promenljive smanjuje (obavezan je pri ispitivanju korelacije između dve promenljive). Na slici 2.1. dat je dijagram rasipanja koji utvrđuje odnos između tri ulazne promenljive (vrste obradnog procesa, veličine uzorkovanja i hrapavosti obrađene površine- R_a) na grešku ravnosti radnih komada merene na koordinatnoj mernoj mašini.



Slika 2.1. Primer dijagrama rasipanja

2.1.2. Line plot – Linijski dijagram

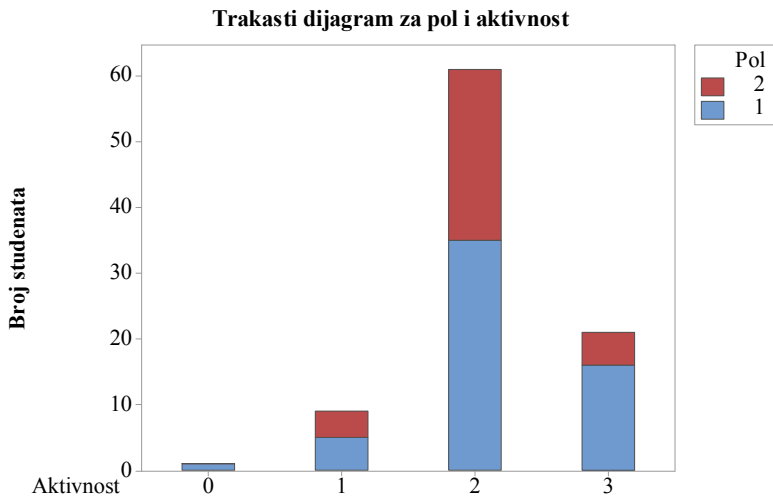
Linijski dijagram (eng. *line plot*) u suštini je dijagram rasipanja u kome su tačke spojene. Spajanje tačaka je korisno tamo gde niz tačaka ima neko posebno značenje. Uobičajena upotreba linijskih dijagrama je, na primer, u situacijama kada podaci iz eksperimenta predstavljaju tačke duž gradijenta uslova, a y-osa predstavlja odziv (odgovor) na ovaj gradijent. Na ovaj način se može odrediti odnos između promenljivih koje se posmatraju ili se može izvršiti poređenje između različitih odziva na gradijent. Povezivanje tačaka čini opšti oblik odziva mnogo jasnijim i koristi se jedino u slučajevima gde to ima smisla. Slika 2.2. prikazuje primer linijskog dijagrama koji pokazuje značajan uticaj hrapavosti obrađene površine na grešku ravnosti merene na koordinatnoj mernoj mašini za radne predmete obrađene glodanjem (čeono i obimno), dok za radne predmete obrađene lepovanjem i brušenjem to nije slučaj.



Slika 2.2. Primer linijskog dijagrama

2.1.3. Bar charts – trakasti dijagrami

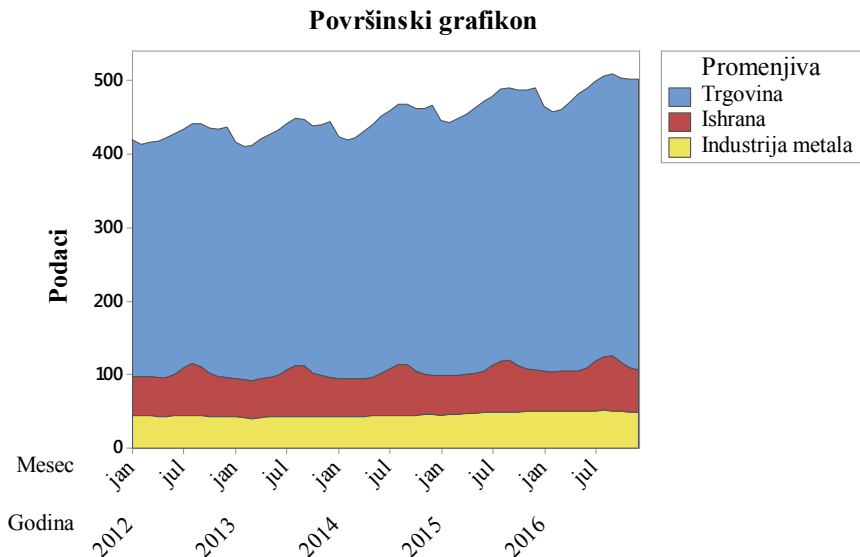
Trakasti dijagrami, pored dijagrama rasipanja, su najčešće korišćeni tip grafičkog prikazivanja podataka. Trakasti dijagrami su obično jednostavni za izradu i generalno se koriste ili za predstavljanje srednjih vrednosti (i odgovarajućih traka greške) ili za brojanje neke vrste, uključujući proporcije ili procenete. Oni se razlikuju od histograma na kojima su frekvencije prikazane za klasne intervale na kontinuiranoj (numeričkoj) skali, a kod trakastog dijagrama frekvencije se prikazuju za različite kategorije. Nije posebno važno da li su trake na dijagramima orijentisane vertikalno ili horizontalno. Na slici 2.3. dat je primer trakastog dijagrama koji pokazuje nivo fizičke aktivnosti studenata proizvodnog mašinstva na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu (0 – nema aktivnosti, 1 – blaga aktivnost, 2 – umerena aktivnost i 3 – velika aktivnost) odvojeno za muškarce i žene (1 – muškarci, 2 – žene).



Slika 2.3. *Primer trakastog dijagrama*

2.1.4. Površinski dijagrami

Površinski dijagrami kombinuju karakteristike linijskih dijagrama i naslaganih trakastih dijagrama. Ovi dijagrami se uglavnom koriste za prikazivanje trendova u vremenu i prostoru, te ih je lakše tumačiti od linijskih i trakastih dijagrama pošto šabloni širenja ili skupljanja površina na dijagramu imaju logičko značenje. Međutim, postoje poteškoće u proceni veličine određene oblasti jer se zahteva da se procene rastojanja između parova linija pod različitim i promenljivim uglovima. U ovim okolnostima, teži se orijentacionoj proceni udaljenosti upravno na linije, a ne paralelno sa y-osom. Na slici 2.4. dat je primer površinskog dijagrama koji analizira trend zapošljavanja u tri različite industrije tokom perioda od 60 meseci.



Slika 2.4. *Primer površinskog dijagrama*

Sa slike 2.4. se može uočiti da se zaposlenost u prehrambenoj industriji i metalnoj industriji nije značajno menjala u periodu od 2012.-2016. godine, dok je se zaposlenost u trgovini postepeno povećavala.

2.1.5. Histogram

Raspodela frekvencija (učestalosti) klasnih intervala (na osnovu razvrstavanja varijacija, dakle svrstavanja vrednosti u klase) se može predstaviti stubastim dijagramom, gde visina stupca odgovara apsolutnoj ili relativnoj frekvenciji date vrednosti promenljive ili klase, koja reprezentuje interval vrednosti, na y-osi. Histogram je specijalan tip trakastog dijagrama koji predstavlja frekvenciju klase intervala vrednosti slučajne veličine. On daje informaciju o raspodeli vrednosti promenljive iz datog raspona (o njenom obliku, vrhovima, ekstremnim vrednostima). Širine stubaca u histogramu predstavljaju širinu intervala klase, a visina stupca predstavlja količinu vrednosti parametara koji pripadaju datom intervalu.

Histogram se koristi za:

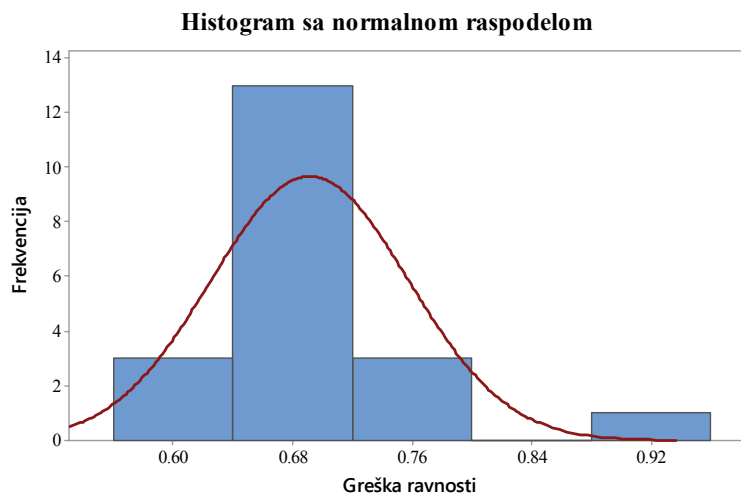
- Grubo predstavljanje raspodele obeležja statističkog uzorka
- Procenu osnovnih karakteristika položaja (srednja vrednost, modus, medijana)
- Procenu osnovnih karakteristika varijabilnosti (raspon uzorka, varijansa, standardna devijacija)

- Procenu raspodele vrednosti osnovnog skupa (funkcija gustine raspodele, funkcija raspodele)
- Analizu uticaja nepoželjnih uzroka

Konstrukcija histograma proizilazi iz grafičkog predstavljanja (u obliku stubastog dijagrama) apsolutnih frekvencija intervala klase varijacija analiziranog uzorka, gde je:

- Visina stupca vrednost frekvencije f_i koja pripada grupnom intervalu
- Širina stupca dužina intervala.

U slučaju neprekidne raspodele, na osnovu stubastog dijagrama, može se pretpostaviti i kriva funkcije gustine raspodele. Na slici 2.5. je prikazan histogram sa normalnom raspodelom rezultata merenja greške ravnosti na KMM sa različitim strategijama merenja.

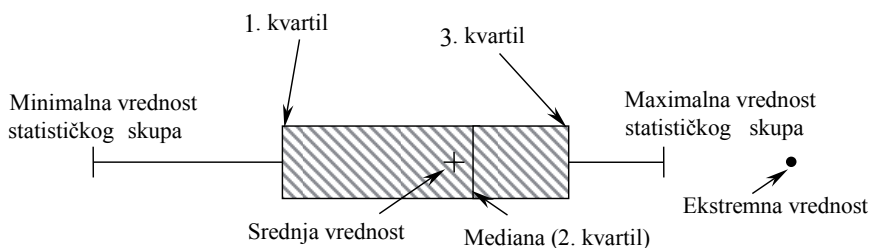


Slika 2.5. Primer histograma sa normalnom raspodelom

2.1.6. Box – plot dijagram

Box - plot dijagram predstavlja raspodelu vrednosti statističkog skupa. Centralna linija u svakom pravougaoniku predstavlja medijanu (drugi kvartil), a krajevi određuju donji i gornji (prvi i treći) kvartil. To znači da pravougaonik predstavlja 50 % svih vrednosti uzorka. Vrednosti od minimalne do maksimalne (raspon varijansi) su opisane pomoću duži, po pravilu samo vrednosti do udaljenosti umnoška kvartila sa 1,5. Vrednosti koje nisu obuhvaćene ovakvim tipom box - plot dijagrama, predstavljene su pomoću tačaka kao ekstremne vrednosti (*outlier*). Ako bi se pomoću duži opisivao ceo raspon varijacija, onda bi u slučaju velike količine podataka samo jedna ekstremna

vrednost mogla da utiče na dijagaram, čime bi došlo do pogrešne interpretacije obrađivanih rezultata. Na slici 2.6. je prikazan izgled box-plot dijagrama.

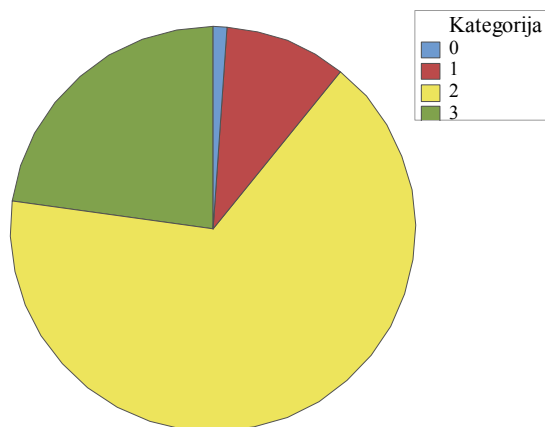


Slika 2.6. Box-plot dijagram

2.1.7. Kružni – pita dijagram

Kružni dijagrami su opštepoznati za grafički prikaz podataka i omiljeni su u paketima poslovne grafike i medijima, ali su relativno ograničeni za naučne svrhe. Pri tumačenju ovih dijagrama pojavljuju se dva problema. Prvo, teže je suditi o relativnim vrednostima veličine kružnog isečka nego u histogramu jer je veći problem oceniti veličine uglova (dve dimenzije) nego proceniti visinu stupca u histogramu. Drugo, ne mogu se postaviti trake grešaka na kružni dijagram, što znači da je ograničen samo na podatke o frekvenciji. Podaci koji se predstavljaju preko kružnog dijagrama se uvek mogu predstaviti preko histograma ili trakastog dijagrama na osnovu kojih je lakše donositi kvantitativne ocene. Na slici 2.7. predstavljen kružni dijagram na bazi podataka koji su dati na slici 2.3, bez razvrstavanja aktivnosti na podgrupu prema polu.

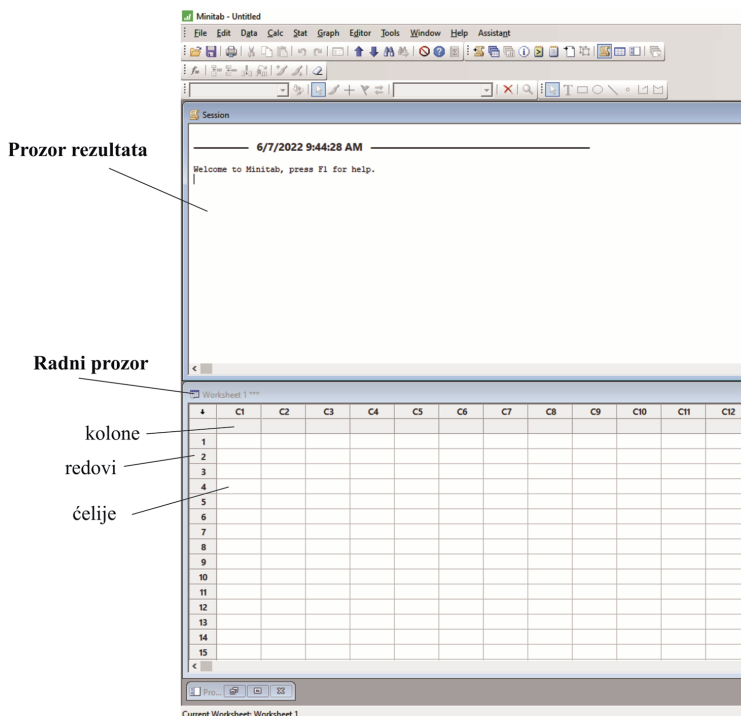
Kružni dijagram za aktivnost



Slika 2.7. Primer za kružni dijagram

2.2. Kreiranje dijagrama u softverskom paketu Minitab

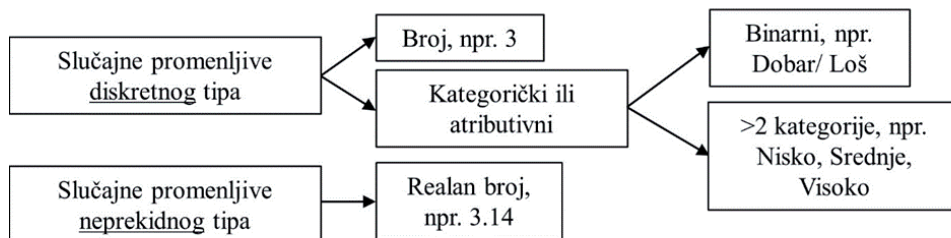
Minitab je softver za statističku analizu, koji automatizuje proračune i kreira dijagrame, omogućavajući korisniku da se više fokusira na analizu podataka i tumačenje rezultata. To je kompletan softver za statističku obradu podataka koji uključuje deskriptivnu statistiku, intervale poverenja, grafičko prikazivanje podataka, testiranje hipoteza, regresionu analizu, planiranje eksperimenta, alate kvaliteta, analizu mernih sistema, itd. Efikasan je i veoma atraktivan za kreiranje eksperimentalnog dizajna, pošto sadrži sve bitne metode za kreiranje eksperimenta i metode analiziranja dobijenih rezultata, kao i njihovo grafičko predstavljanje. Posebno je pogodan za sprovođenje 6σ metodologije. Korisnički interfejs softvera Minitab prikazan je na slici 2.8.



Slika 2.8. Korisnički interfejs Minitab softvera

Pokretanjem Minitaba, počinje se sa novim praznim projektom. Podaci u projekat se mogu dodavati na više načina, ali je najčešći način otvaranjem radnog prozora (**worksheet**). Podaci se unose u ćelije, pri čemu treba voditi računa da se ulazne i izlazne promenljive svrstavaju u kolone i odgovarajući odziv izlazne promenljive mora da zadovolji odgovarajuće ulazne promenljive. Kada se posmatra bilo koji sistem, potrebno je shvatiti sa kakvim podacima sistem radi, jer to diktira alate i tehnike koje će biti korišćene za analizu sistema. U opštem slučaju podaci se mogu razvrstati na kontinuirane (numeričke, kvantitativne), tj. neprekidne slučajne promenljive sa odgovarajućom

raspodelom (normalna, eksponencijalna, uniformna, itd.) i kategoričke (atributivne, kvalitativne), tj. diskretne slučajne promenljive sa odgovarajućom raspodelom (Poissonova, binomna, itd.) Promenljive neprekidnog tipa su od najvećeg značaja i zato većina savremenih mernih sistema kao izlaz daje neprekidne podatke sa najvećom mogućom rezolucijom. Dalja klasifikacija podataka je data na slici 2.9.



Slika 2.9. Klasifikacija podataka

Minitab takođe prepoznaje različite kategorije podataka, slika 2.10. Sa slike se mogu uočiti tri različita oblika podataka – datum i tekst kao diskretne slučaje promenljive i numeričke vrednosti kao neprekidne slučajne promenljive.

D-pokazuje da je promenjiva formirana u obliku datuma

	C1	C2-D	C3	C4-T
	Indeks	Mesec	Prodaja	Agencija
1	2000	January	210	Alfa
2	2000	February	205	Alfa
3	2000	March	202	Alfa
4	2000	April	245	Alfa
5	2000	May	237	Alfa
6	2000	June	290	Omega
7	2000	July	299	Omega

Kada nema sufikasa to znači da je promenjiva numerička

T-pokazuje da je promenjiva formirana u obliku teksta

Slika 2.10. Klasifikacija podataka u Minitab-u

Tipovi grafičkog prikazivanja podataka (dijagrama) u Minitabu su dati u tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Tipovi dijagrama u Minitabu

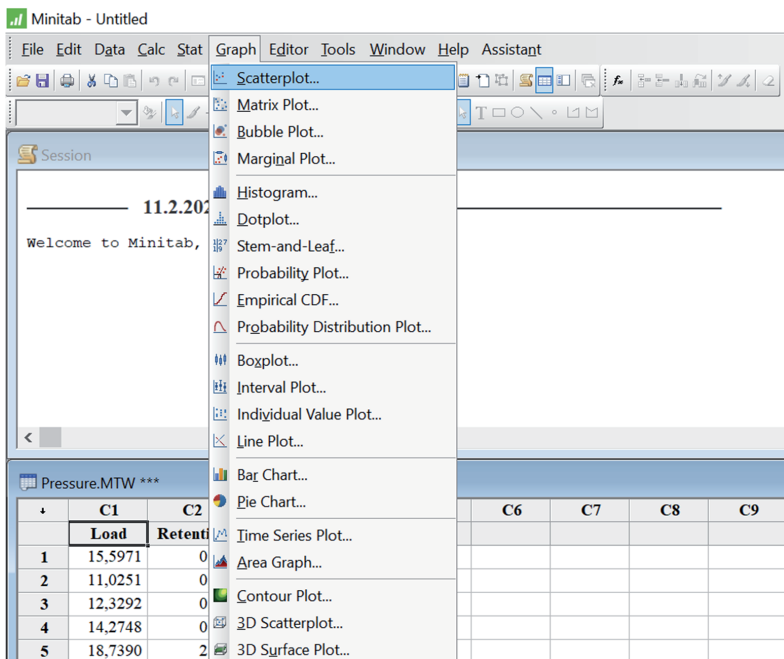
Cilj	Adekvatan dijagram
Pristup relacijama između parova promenljivih	Scatterplot – pokazuje relaciju između dve promenljive Matrix Plot – pokazuje relacije između parova promenljivih odjednom Marginal Plot – slično kao Scatterplot, ali dodaje histogram, dotplot ili boxplot svake promenljive na marginama dijagrama
Pristup raspodelama	Histogram – prikazuje oblik i centralnu tendenciju podataka Dotplot – slično histogramu, ali koristi manji broj podataka Stem–an –Leaf (stabljika i list) – prikazuje aktuelne podatke u binarnom formatu Probability Plot – prikazuje koliko dobro podaci prate definisanu raspodelu Empirical Plot – slično probability plot-u, ali ovde su skale uvek linearne Boxplot – Poredi uzorak iz karakteristične raspodele (kao što je medijana, opseg, simetrija i definiše vangranične vrednosti)
Poređenje zaključaka ili pojedinačnih vrednosti promenljivih	Boxplot – poredi uzorak karakteristične raspodele i označava vangranične vrednosti Interval Plot – poredi srednje vrednosti Individual Value plot – pristupa i poredi vrednosti individualnih podataka Line Plot – Scatter plot u kome su tačke spojene. Bar chart – poredi zbirnu statistiku, kao što je srednja vrednost kroz nivoe grupa Pie Chart – daje relativni doprinos svake grupe zbiru
Pristup raspodelama brojača	Bar chart – poredi draspodele brojača Pie Chart – poredi relativni udeo (proporciju) svake grupe prema celom skupu
Crtanje niza podataka u vremenu	Time series plot – za podatke koji su skupljeni u jednakom vremenskom intervalu i po hronološkom redu

	Area Graph – pokazuje kako se kompozicija zbira menja kroz vreme sa naslaganim podacima Scatterplot – za podatke koji su prikupljeni u neregularnom intervalu ili koji nisu u hronološkom redu
Pristup relacijama između tri promenljive	Counter Plot – mapira merne veličine kao funkcija dve druge promenljive 3D Scatterplot – crta pojedinačna posmatranja u 3 dimenzije, definisane kao x, y, z promenljive 3D Surface Plot – slično 3D Scatterplot osim što prikazuje kontinualnu površinu ili rešetku umesto pojedinačnih podataka

U cilju demonstracije nekih od mogućih grafičkih prikazivanja podataka u Minitabu, prvi korak je otvaranje datoteke **Pressure.MTW**. Ova datoteka je jedna od nekolicine radnih datoteka, koje se nalaze u bazi podataka Minitaba. Najveći broj ovih datoteka su u poddirektorijumu podataka (**Data subdirectory of folder**). Raspored koraka je sledeći:

1. U padajućem meniju se aktivira **File>Open Worksheet**.
2. Zatim se aktivira ikonica **Look in Minitab Sample Data folder** i izabere se datoteka **PRESSURE.MTW**.
3. Klikne se **Open** i zatim **OK**.

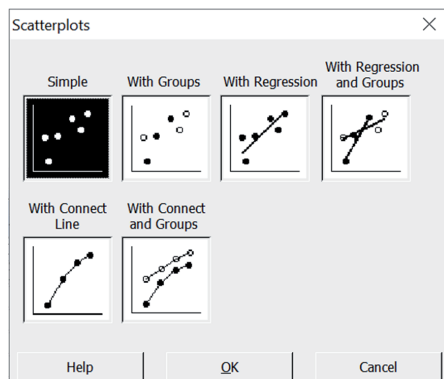
Kada se otvori datoteka mogu se uočiti četiti kolone podataka, prve tri kolone su ulazne promenljive, a četvrta kolona je izlazna promenljiva. Naime, cilj je grafički predstaviti uticaj ulaznih promenljivih (vremena termičkog tretiranja drveta, debljine nanosa lakiranog sloja na drvo i vrste jedinjenja (laka) koje se nanosi na drvo) na nosivost drveta kao izlazna karakteristika. U cilju prikaza odnosa ulaznih promenljivih na izlaznu promenljivu koristi se dijagram rasipanja, slika 2.11. (iz glavnog menija se izabere opcija **Graph→Scatterplots**).



Slika 2.11. Izbor dijagrama u Minitabu

Nakon izbora tipa dijagrama koji se želi kreirati, mora se suziti njihov izbor korišćenjem galerije dijagrama. Ove galerije nude uobičajene grafičke varijacije koje omogućavaju da se kreira dijagram koji je tako dizajniran da odgovara potrebama sa najmanje ulaza. Galerija dijagrama nudi mogućnost variranja odgovarajućeg kreiranog dijagrama i u ponudi su sledeće opcije, slika 2.12:

- **Simple** – za upotrebu bez promenljivih grupisanih po kategorijama
- **With Groups** – za upotrebu sa promenljivim grupisanim po kategorijama
- **With Regression** – postavlja regresionu analizu bez promenljivih grupisanih po grupama
- **With Regression and Groups** – postavlja regresionu analizu za upotrebu sa promenljivim grupisanim po kategorijama.

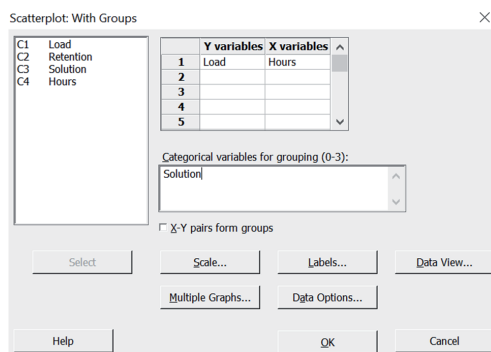


Slika 2.12. Galerija dijagrama za dijagram rasipanja

U ovoj fazi rada ne postoji potreba za primenom regresione analize i linija povezivanja, te se primenjuje samo grupisanje promenljivih, izborom opcije **With Groups**.

U **Scatterplot**-u se pojavljuje **Data Source dialog box** (prozor za unos podataka) gde je potrebno uneti promenljive koje će biti prikazane na dijagramu, slika 2.13.

Debela crna linija koja uokviruje prvi red Y kolone (pokazuje da je ta kolona aktivna) pokazuje da će promenljiva izabrana iz liste promenljivih biti uneta u ovo polje. Da bi se promenljiva unela u aktivno polje, klikne se na promenljivu u **variable list box** i klikne se na **Select** ili se prosto dva puta klikne na promenljivu. U koloni ispod Y promenljive unese se **Load**, a u koloni ispod X promenljive unese se **Hours**.



Slika 2.13. Prozor za unos promenljivih

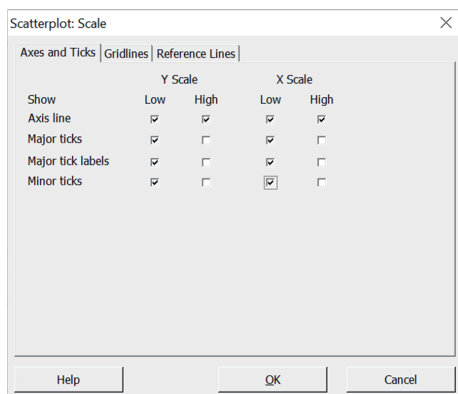
U promenljivoj **Categorical variables for grouping (0-3)**, unese se **Solution**.

Raspoložive opcije dijagrama odgovaraju dijagramu koji će biti kreiran i one mogu biti sledeće:

- **Scale**: ose, mreže, referentne linije, procentualne linije
- **Labels**: nazivi podataka, naslova, futnota
- **Data View**: prikazani podaci uključuju fitovane linije
- **Multiple Graphs**: postavka višestrukih dijagrama

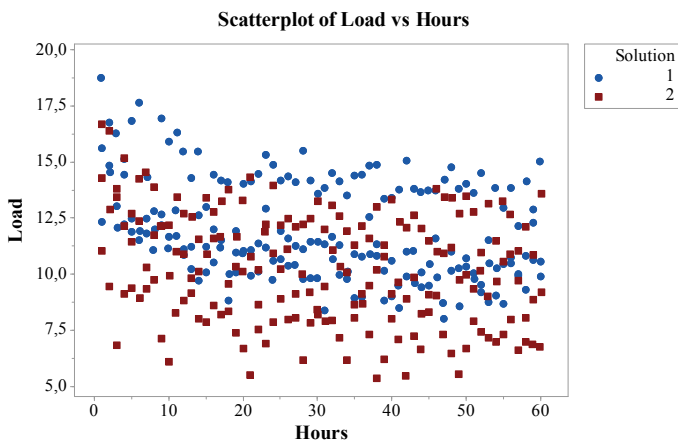
- **Data Options:** podešavanje podataka, upravljanje nedostajućim vrednostima i kolonoma frekvencija

Za dodavanje osa i linija mreža potrebno je aktivirati **Scale**, ispod **Y Scale**, čekirati **Minor Ticks** u koloni **Low**, a u koloni **X Scale**, izabrati **Minor Ticks** u koloni **Low**. Zatim pritisnuti ikonicu **OK**, slika 2.14.



Slika 2.14. Opcija dijagrama *Scale*

Izlazni dijagram je prikazan na slici 2.15. Sa slike se može uočiti da generalno veću nosivost imaju daske koje su premazane jedinjenjem „1“ i takođe se može zaključiti da usled povećanja vremena dasaka u sušari nosivost istih blago opada.

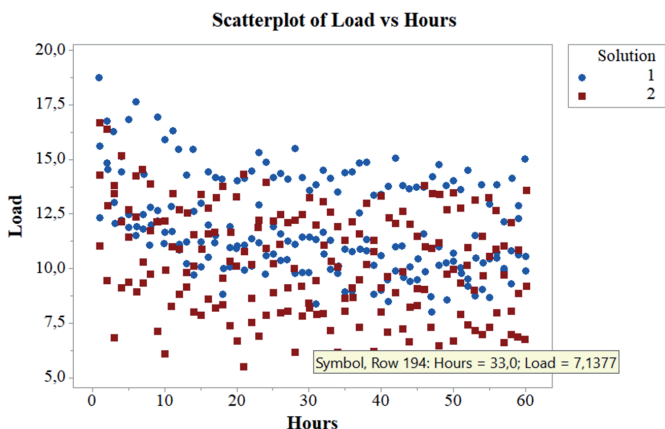


Slika 2.15. Dijagram rasipanja koji pokazuje nosivost materijala u zavisnosti od sati provedenih u sušari i vrste jedinjenja koje se koristi kao premaz

Za dobijanje više informacija, sa grafičkog prikaza podataka, koriste se dodatne opcije, kao što su **Data tips** i **Crosshairs**, koje omogućavaju da se vide egzaktne vrednosti datih promenljivih.

Data tips

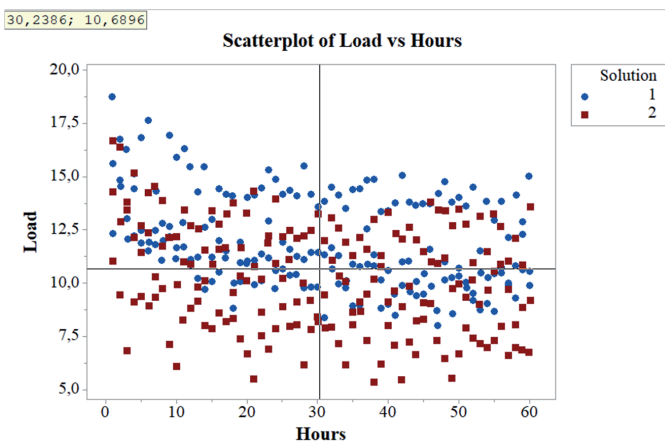
Data tips prozor se pojavljuje kada se kursor postavi na bilo koju tačku na dijagramu i on daje red sa koordinatama te tačke. Ako se tačka nalazi ekstremno van granica, može se sprovesti dodatno istraživanje. Ova tehnika koristi referentne ili procentualne linije, kao i druge grafičke veličine. Postavljanjem kursora na željeno mesto, pojavljuje se **data tips**, slika 2.16.



Slika 2.16. Opcija dijagram **Data tips**

Crosshairs

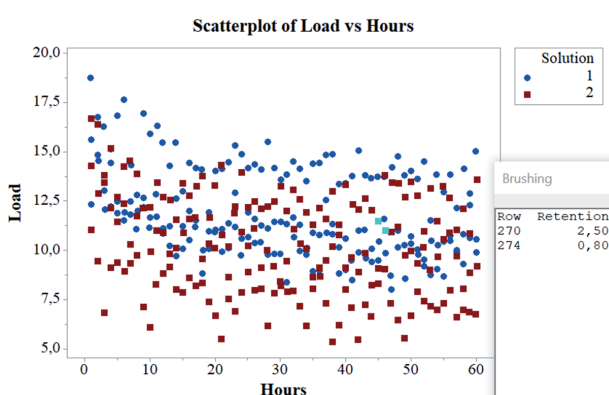
Za aktiviranje **Graph Editing Toolbar** se izabere opcija **Tools>Toolbars>Graph editing**. Zatim se aktivira ikonica  (**crosshairs**) i pomera se kursor kroz oblast podataka. Stvarne koordinate su date dok se pomera **Crosshairs**, slika 2.17.



Slika 2.17. Opcija **crosshairs**

Brushing mode

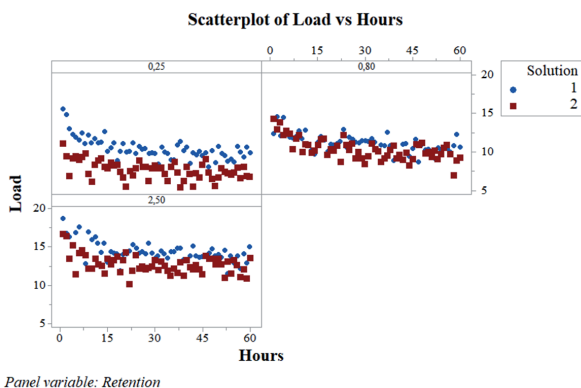
Brushing mode dozvoljava da se otkriju dodatne informacije o pojedinačnim ili grupnim opservacijama. Za ulazak u **Brushing mode** aktivira se ikonica . Ako postoji sumnja da opseg opservacije u dijagramu korespondira sa različitim nivoima održavanja iz eksperimenta, izabere se **Editor>Set ID variables** i u **Variables** se na primer izabere **Retention**. Klikne se **OK**. Sada će se promenljiva **retention** prikazivati za svaku tačku za koju se primeni **brush**, slika 2.18.



Slika 2.18. Opcija dijagrama **Brushing mode**

Na prethodnim dijagramima su prikazane relacije između maksimalne nosivosti drveta i vremena termičkog tretiranja drveta i izvršeno je grupisanje tačaka prema dve vrste premaza. Pošto je promenljiva **retention** kategorijska, može se koristiti kao **paneling** promenljiva grupisanja na sledeći način:

1. Izabere se **Editor > Panel**
2. U **By variables with groups in saparate panels** unese se **Retention** i zatim **OK**.

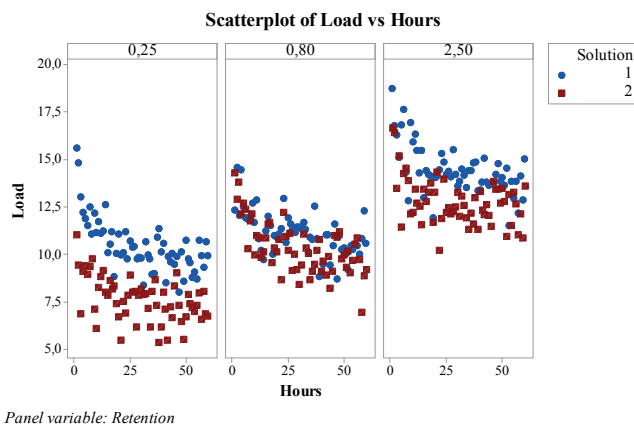


Slika 2.19. Uključivanje još jedne ulazne promenljive

Pored toga što je dijagram grupisan po **Solution** sada postoje paneli **Retention**. Sada je mnogo jednostavnije opisati razlike između ispitivanih ulaznih promenljivih.

Izmena panela se vrši na sledeći način:

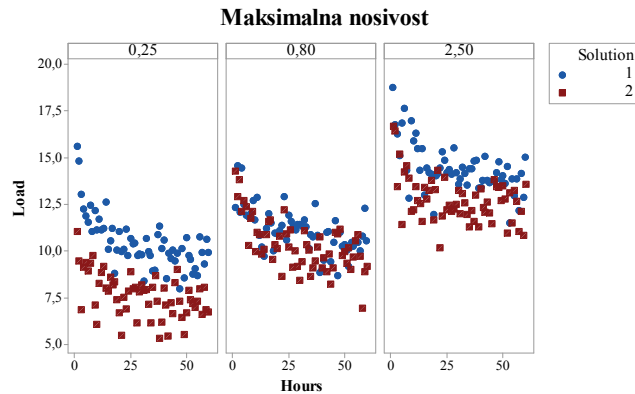
1. Dva puta se klikne na **Panel Label**
2. Zatim na **Arrangement tab**
3. Pod **Rows** and **Columns** se izabere **Custom**
4. U **rows** se unese **1** a u **Columns** se unese **3**
5. U **Margins between panels** unese se **0,02**
6. Zatim opcija **Options**
7. Pod **Alternate Ticks on panel when Appropriate** izabere se **Don't Alternate Panels** i **OK**



Slika 2.20. Prikaz podataka u jednom redu i tri kolone

Sa slike 2.21. se može jasno uočiti, da se povećanjem debljine nanosa lakiranog sloja na drvo (**Retention**) povećava i vrednost izlazne promenljive, tj. nosivost drveta. Takođe, jasnije se može uočiti da se korišćenjem opcije „1“ za premaz dobija veća nosivost, a da se povećanjem sati tretiranja drveta u sušari, nosivost smanjuje.

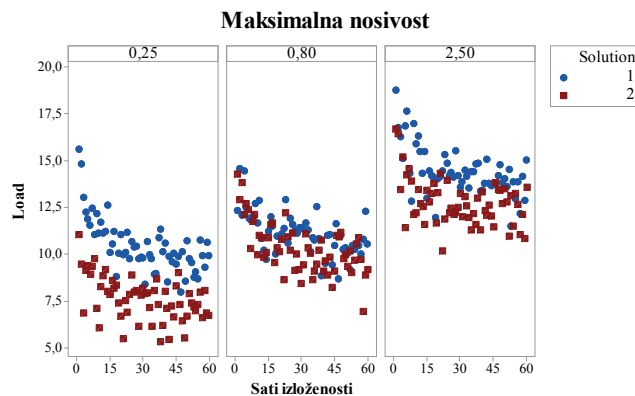
Naslov dijagrama kao i povećanje veličine fonta i promena teksta vrši tako što se dva puta klikne na naslov dijagrama, a zatim se kod opcije **Size** unese veličina fonta **16**, a u tekstu se napiše novi naslov **Maksimalna nosivost tokom vremena**, slika 2.21.



Panel variable: Retention

Slika 2.21. Podešavanje naslova dijagrama

Ako se želi izmeniti mreža linija na *x-skali*, dvaput se klikne na nju i pod **Major Tick Positions** izabere se redom **0 15 30 45 60** i **OK**. Za promenu *labels x-ose* dvaputa se klikne na **Hours** i upiše se novi naziv **Sati izloženosti**.



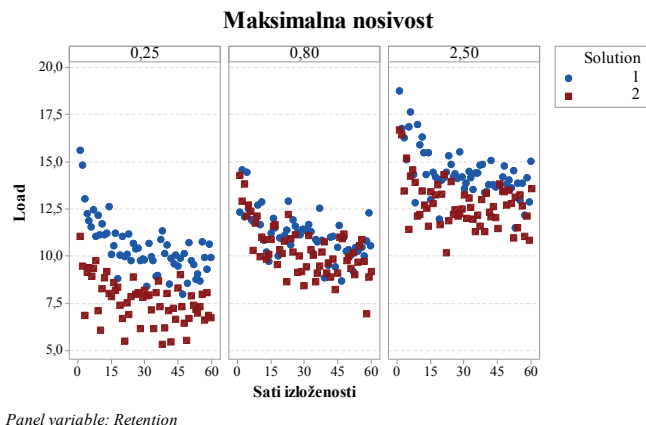
Panel variable: Retention

Slika 2.22. Izmena x ose

Dodavanje novih elemenata na dijagram

Elementi koji se žele dodati razlikuju se u zavisnosti od dijagrama. Ukoliko se žele dodati pomoćne linije za y – osu procedura je sledeća (slika 2.23):

1. **Editor > Add > Gridlines**
2. Ispod **Show Gridlines For**, izabere se **Y major ticks**
3. **OK**



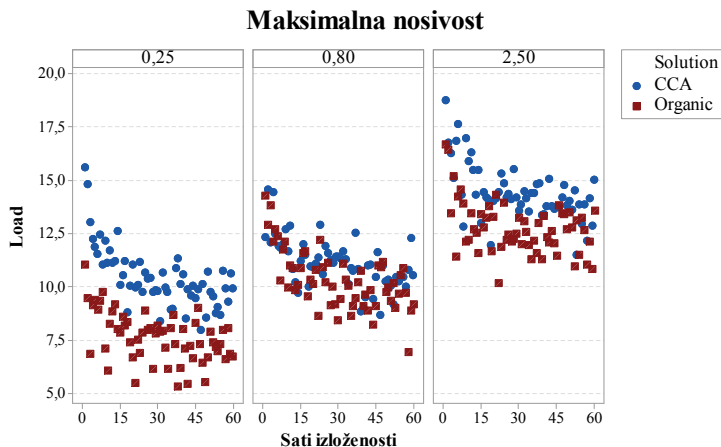
Slika 2.23. Dodavanje pomoćnih linija na dijagram

Kodiranje podataka

U slučaju da se želi kodirati promenljiva **Solution**, na taj način da se originalna vrednost **1** promeni u **CCA** a, vrednost **2** u **Organic**, procedura je sledeća:

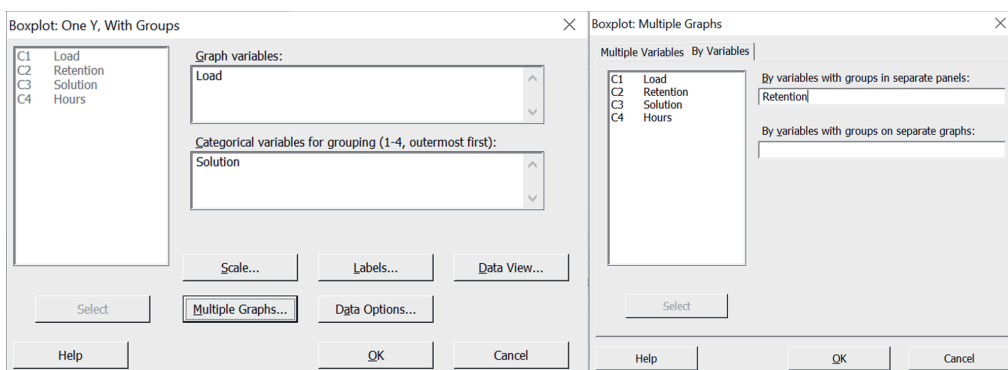
1. Izabere se **Data > Code > Numeric to text**
2. U **Code data from columns** unese se **Solutions**
3. U **Store coded data in columns** unese se **Solution**
4. U prvi red **Original values** unese se **1**
5. U prvi red **New** unese se **CCA**
6. U drugi red **Original values** unese se **2**
7. U drugi red **New** unese se **Organic**, zatim **OK**

Da bi se na dijagramu izvršila promena, potrebno je izabrati **Editor > Update > Update Graph Now**, slika 2.24. Podaci će takođe biti promenjeni i u radnom listu za promenljivu **Solution**.

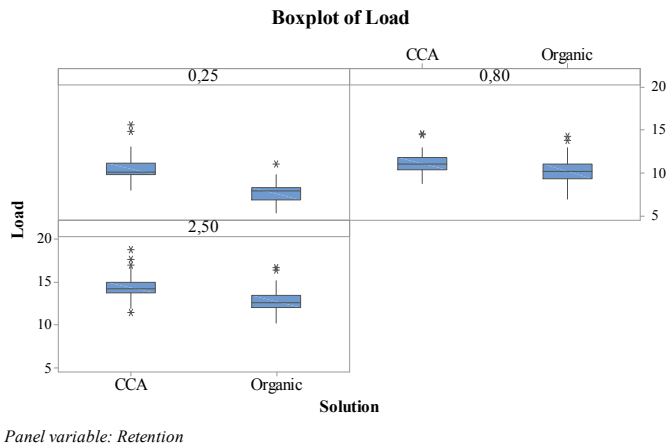


Slika 2.24. Kodiranje podataka

U nastavku će biti opisana procedura kreiranja box-plot dijagrama. U cilju kreiranja box – plot dijagrama za predstavljane podatke iz prethodno datog primera, potrebno je iz **Graph** izabrati **Box – plot** i izabrati **One Y > With Groups**, a zatim **OK** (slika 2.11.). U **Graph variables** se unese **Load**, a u **Categorical variables for grouping** se unese **Solution**. U ovom koraku se može odmah uključiti razvrstavanje po promenljivoj **Retention**, tako što se izabere **multiple Graphs**, a zatim se kod opcije **By variable with groups in separate panels** unese **Retention** i pritisne dugme **OK**, slike 2.25 i 2.26.



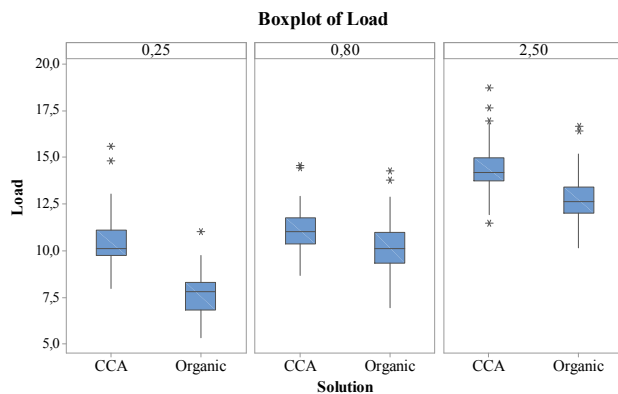
Slika 2.25. Procedura kreiranja Box-plot dijagrama



Slika 2.26. Box-plot dijagram

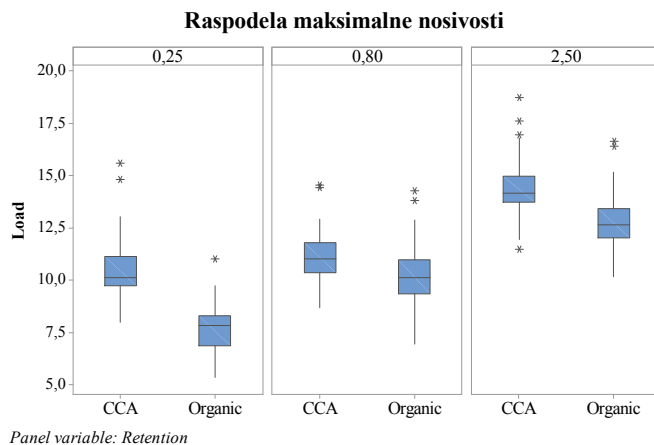
Izmena panela se vrši na sledeći način, slika 2.27:

1. Dva puta se klikne na **panel label**
2. Zatim treba kliknuti na **Arrangement tab**
3. Pod **Rows** and **Columns** se izabere **Custom**
4. U **Rows** se unese **1**, a u **Columns** se unese **3**
5. U **Margins between panels** unese se **0,02**
6. Zatim se izabere opcija **Options**
7. Pod **Alternate Ticks on Panel when Appropriate** se izabere **Don't Alternate Panels** i na kraju se klikne **OK**



Slika 2.27. Prikaz podataka u jednom redu i tri kolone

Naslov prethodno prikazanog dijagrama, kao i povećanje veličine fonta i promena naslova dijagrama se vrši tako što se dva puta klikne na naslov dijagrama, a zatim se pod **Size** unese veličina fonta **14**, a u tekstu se napiše novi naslov **Raspodela maksimalne nosivosti**. Takođe, naziv *x* -ose se izbriše, slika 2.28.

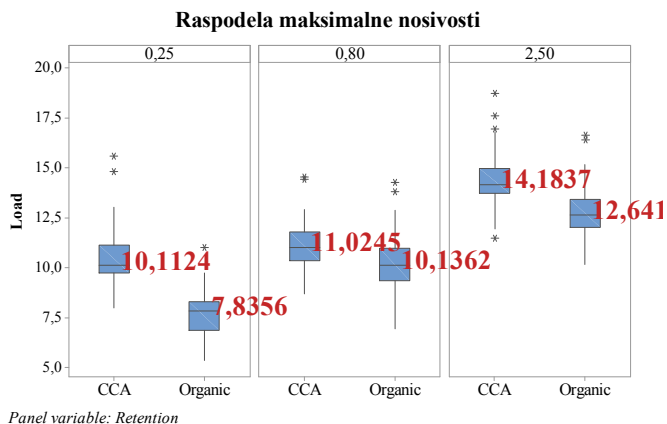


Slika 2.28. *Podlašavanje naslova i x -ose*

Dodavanje i promena naziva podataka

Dodavanje vrednosti medijane (karakteristika raspodele) i promena njenih karakteristika se vrši na sledeći način, slika 2.29:

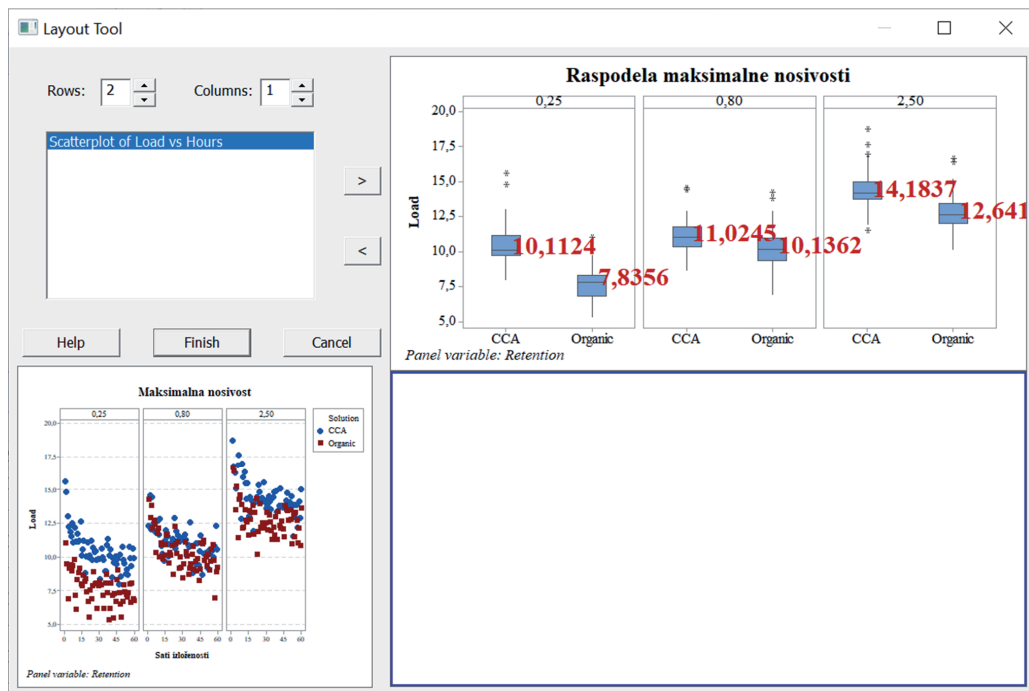
1. **Editor > Add > Data Labels**
2. Klikne se na **Medians**, ispod **Label type** izabere se **Use y – value Labels**, a zatim **OK**
3. Dva put se klikne na **Median label**
4. Zatim se pod **Font**, u opciji **Color** izabere crvena boja
5. U opciji **Style** se izabere **Bold**
6. U opciji **Size** se unese **18**
7. Klikne se na **Alignment**
8. U opciji **Offset** se izabere **Custom**
9. U **horizontal** se ukuca **0,02** i **OK**



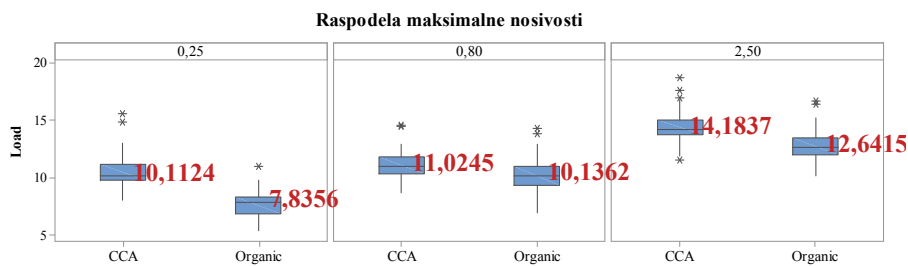
Slika 2.29. Dodavanje i promena naziva podataka na primeru medijane

Prikazivanje više dijagrama na istoj stranici

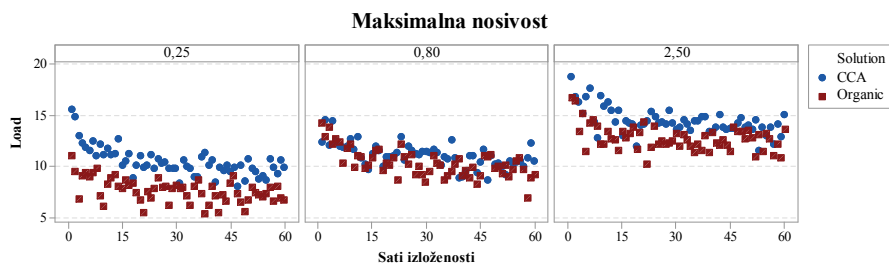
Ukoliko se dva kreirana dijagrama (ili njih više) žele spojiti u jedan, koristi se opcija sa glavnog menija **Editor > Layout Tool**, slika 2.30. U **Rows** se unese **2**, a u **Columns** **1**. Prvi dijagram je **box – plot**, a drugi **scatterplot**, a zatim **Finish**, slika 2.31.



Slika 2.30. Opcija Layout Tool za spajanje više dijagrama u jedan



Panel variable: Retention



Panel variable: Retention

Slika 2.31. Izgled spojenih dijagrama

Na ovom primeru data su dva grafička prikaza podataka sa dodatnim podopcijama. U sledećim poglavljima će takođe biti više reči o grafičkim prikazima, koji su svojstveni za neke od statističkih alata, koji su sadržani u Minitab softveru.

3. DESKRIPTIVNA STATISTIKA, REGRESIONA ANALIZA I KORELACIJA

Grafičko prikazivanje podataka je veoma korisno za lakši i razumniji pregled uzorka (populacije, serije) međutim, često uz grafički prikaz je potrebno iskazati neke kvantitativne statističke pokazatelje koji daju više informacija o posmatranom uzorku.

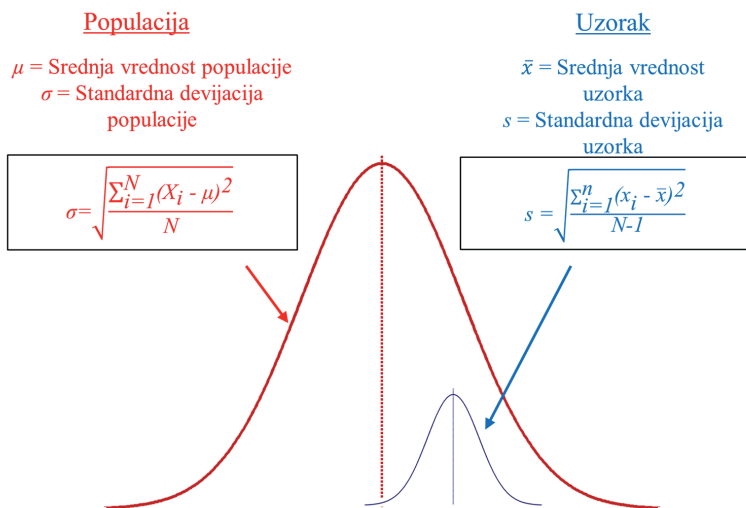
3.1. Deskriptivna (opisna) statistika

Deskriptivna statistička analiza predstavlja skup metoda kojima se vrši izračunavanje, prikazivanje i opisivanje osnovnih karakteristika statističke serije (populacije). Ova analiza se sprovodi nad podacima kompletne populacije. Kompletan skup podataka se analizira u cilju dobijanja informacije koje opisuju celu populaciju, slika 3.1.



Slika 3.1. *Sprovođenje deskriptivne statistike*

Čest je slučaj da je nemoguće ili nije ekonomski opravdano ispitati celu seriju (populaciju) i da je potrebno izvršiti statističku obradu podataka na reprezentativnom uzorku koji verodostojno odlikava seriju. U tom slučaju će se statističke procene za seriju donositi na bazi uzorka i ovo se naziva uzoračka statistika, slika 3.2. Na primer, recimo da fabrika proizvodi 100,000 delova u danu. Ekonomski nije opravdano meriti sve delove i odlučeno je da se uzme uzorak od 500 delova. Nakon merenja uzorka utvrđeno je da je srednja vrednost težine 25 g. Na bazi uzorka, tvrdiće se da je srednja vrednost serije takođe 25 g. Izbor uzorka iz populacije je nasumičan i postoji šansa da uzorak nije reprezentativan (neadekvatan) te je potrebno koristiti intervale koji predstavljaju verovatnoću u ispravnosti donošenja odluke. Dakle, populacija ili serija predstavlja skup svih entiteta o kojima se želi doneti neki zaključak i na koje će se odnositi pretpostavka ili rezultat, a uzorak je samo jedan njen podskup, odnosno deo koji je u istraživanju bio dostupan za merenje i analizu.



Slika 3.2. Uzoračka statistika

Uzorak i/ili populacija podležu nekoj od funkcije gustine raspodele verovatnoća. U praksi, rezultati merenja iskazani kao numeričke karakteristike uglavnom imaju normalnu (Gausovu) raspodelu. Raspodele frekvencija imaju nekoliko karakteristika koje su vrlo pogodno za njihovo definisanje i opisivanje i to su pre svega:

- Vrednosti oko kojih se rezultati merenja nagomilavaju (srednja vrednost, medijana i mod)
- Rasipanje ili disperzija izmerenih rezultata (raspon, varijansa, standardna devijacija, rezidual)

Kao pokazatelj centralne tendencije najčešće se upotrebljava **srednja aritmetička sredina** μ , koja se izračunava kada se zbir vrednosti svih rezultata serije podeli sa ukupnim brojem rezultata, jednačina 3.1:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (3.1.)$$

Medijana ($\tilde{x}$) je vrednost koja deli uzorak na dva jednaka dela, pod uslovom da su podaci u uzorku poredani u neopadajućem nizu (numerička statistička serija). Na primer, za seriju 5, 7, 10, 12, 17 medijana je 10. U slučaju parnog broja rezultata, medijana je aritmetička sredina dva centralna člana, npr., za seriju 5, 7, 10, 12, 17, 20 medijana je aritmetička sredina brojeva 10 i 12, odnosno 11.

Mod ($\hat{x}$) je onaj rezultat koji ima najvišu frekvenciju, odnosno, rezultat koji se najčešće ponavlja. Ovde treba napomenuti da raspodela frekvencija može imati samo jednu aritmetičku sredinu ili medijanu, dok s druge strane može imati jedan ili više modova.

Karakteristike koje opisuju rasipanje populacije (uzorka) su objašnjene u nastavku.

Raspon R je razlika između najveće (x_{max}) i najmanje vrednosti (x_{min}) u uzorku, jednačina 3.2.

$$R = x_{max} - x_{min}. \quad (3.2.)$$

Rezidual (odstupanje) je rastojanje od svake tačke do srednje vrednosti $\mu - x_i$, a po definiciji zbir svih devijacija je nula. Često se u statistici koristi zbir kvadrata reziduala $\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$, koji se može zvati i zbir kvadrata. Zbir kvadrata reziduala se koristi za definisanje varijanse (dispersije), jednačina 3.3:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}. \quad (3.3.)$$

Kada se korenuje vrednost varijanse dobija se standardna devijacija σ , parametar koji se najčešće koristi kao mera rasipanja posmatrane populacije, jednačina 3.4.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}. \quad (3.4.)$$

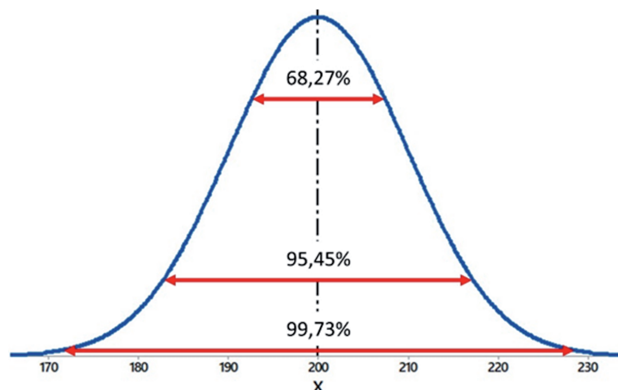
Procena intervala poverenja se uvek procenjuje sa tačnošću od 95 % verovatnoće. Intervali poverenja se uglavnom određuju za srednju vrednost, medijanu i standardnu devijaciju. Na primer, interval poverenja za srednju vrednost se računa prema jednačini, 3.5:

$$\text{interval poverenja za srednju vrednost} = \mu \pm \text{faktor poverenja} \times \sigma / \sqrt{N}. \quad (3.5.)$$

Faktor poverenja u stvari predstavlja sa kojom verovatnoćom se želi biti siguran u ovoj proceni. Kako je gore napisano uglavnom se koristi faktor pokrivanja 95 %. Povećanje faktora poverenja, na recimo 99 %, pritom ostavljajući ostale parametre konstantnim, rezultiraće širim intervalom poverenja.

3.1.1. Normalna raspodela

Jedna od osnova u statistici jeste da se utvrdi vrsta funkcije gustine raspodele frekvencija koja se dobija iz podataka. Raspodela utiče na oblik histograma koji se dobije, gde y osa predstavlja frekvenciju. Normalna raspodela (Gausova raspodela) je posebno bitna jer formira osnovu za mnoge procedure testiranja, pojavljuje se u praktičnim eksperimentima i onome što je čovekova tvorevina i rezultat je Centralne granične teoreme. Normalna raspodela prikazana na slici 3.3. ima srednju vrednost $\mu=200$ i standardnu devijaciju $\sigma=10$ ($\mathcal{N}(200,10)$). 68,27 % podataka je unutar jedne standardne devijacije srednje vrednosti ($\pm\sigma$), 95,45 % podataka je unutar dve standardne devijacije srednje vrednosti ($\pm 2\sigma$), 99,73 % podataka je unutar tri standardne devijacije srednje vrednosti ($\pm 3\sigma$).

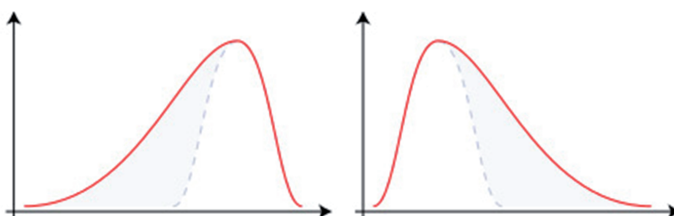


Slika 3.3. Normalna raspodela $\mathcal{N}(200,10)$

Normalna raspodela se može opisati preko sledećih opštih pravila:

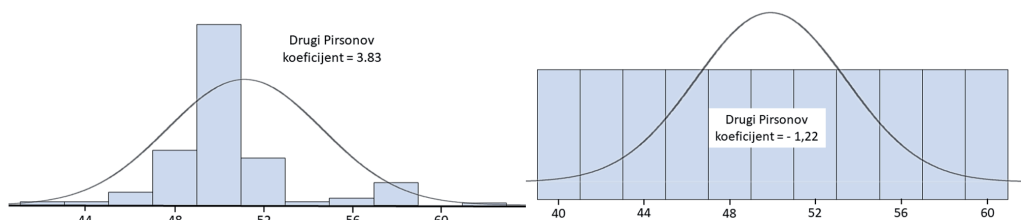
- Opisana je srednjom vrednošću i standardnom devijacijom
- Krajevi se produžuju do $\pm\infty$
- Sve opservacije (posmatranja, eksperimenti) se pojavljuju ispod krive
- Kriva je simetrična
- Srednja vrednost, mod i medijana su skoro jednake

Mala odstupanja od normalne raspodele, kao što su asimetrija i spljoštenost, mogu dati bitne informacije u vezi toga gde se proces ne ponaša kako se očekuje. Odstupanja od normalne raspodele, koja se odnose na asimetriju (eng. *skew*) se mogu opisati preko „levo orijentisanih ili negativno asimetričnih podataka“, što ukazuje da se srednja vrednost nalazi levo od medijane“ ili „desno orijentisanih ili pozitivno asimetričnih podataka“, što ukazuje da se srednja vrednost nalazi desno od medijane, slika 3.4. Ako se želi unaprediti proces jedan od prvih koraka bi bio otkrivanje uzroka asimetričnosti raspodele ako se očekuje da proces ima normalnu raspodelu. Kao mere asimetričnosti koriste se centralni momenti drugog i trećeg reda. Relativni pokazatelj asimetričnosti se naziva prvi Pirsonov koeficijent. Vrednost ovog koeficijenta je nula ako je raspodela simetrična, a ukoliko mu je vrednost veća utoliko je i asimetrija izraženija.



Slika 3.4. Negativna i pozitivna asimetrija podataka

Spljoštenost (eng. *kurtosis*) je takođe mera kojom se raspodela može razlikovati od normalne. Spljoštenost je mera koliko je ravna ili izbočena raspodela, slika 3.5. Napomenuto je da kod normalne raspodele 68,27 % podataka unutar jedne standardne devijacije srednje vrednosti ($\pm\sigma$). Ako je raspodela ravna ova vrednost će iznositi 68 %, a ako je izbočena biće dosta viša. Mera spljoštenosti je drugi Pirsonov koeficijent i njegova vrednost je nula ako je raspodela normalna, a na primer ako je potpuno ravna onda je -1,22.



Slika 3.5. Izbočena i ravna raspodela

Važno je imati informaciju da li posmatrani podaci imaju normalnu raspodelu jer mnoge statističke analize (testovi) to zahtevaju. Postoje dva glavna načina da se to uradi; jedan je da se koristi dijagram normalne raspodele verovatnoća, a drugi je da se koriste testovi normalnosti kao što je npr. *Anderson-Darling (AD)* test. Više detalja o ispitivanju normalnosti podataka biće dato u delu teksta gde je prikazan praktičan primer u Minitabu.

3.1.2. Primer deskriptivne statistike u Minitabu

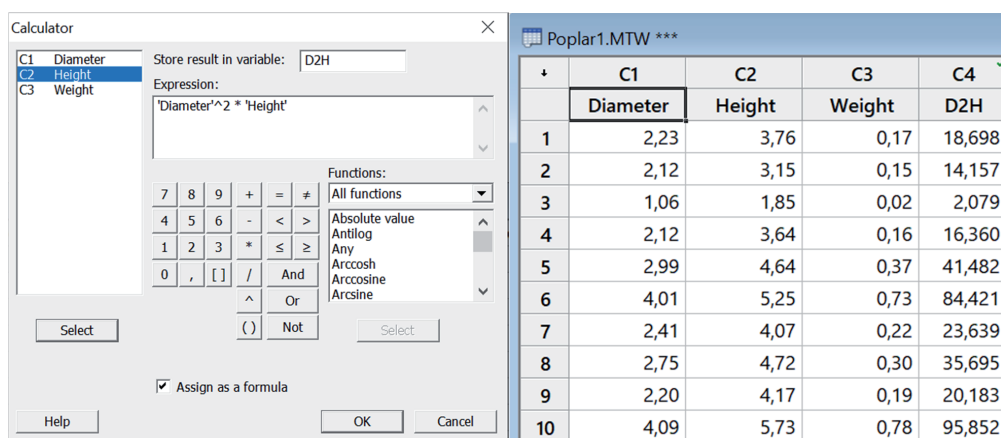
U cilju prikazivanja sporovođenja deskriptivne statistike u Minitabu potrebno je otvoriti fajl **Poplar1**, koji se nalazi u bazi podataka (**Minitab Sample Data Folder**). Ovaj radni prozor sadrži rezultate merenja sadnica topole, tj. *Diameter* (prečnik), *Height* (visina) i *Weight* (težina). Svaka od ovih promenljivih ima 15 merenja, slika 3.6.

Poplar1.MTW ***			
	C1	C2	C3
	Diameter	Height	Weight
1	2,23	3,76	0,17
2	2,12	3,15	0,15
3	1,06	1,85	0,02
4	2,12	3,64	0,16
5	2,99	4,64	0,37
6	4,01	5,25	0,73
7	2,41	4,07	0,22
8	2,75	4,72	0,30
9	2,20	4,17	0,19
10	4,09	5,73	0,78

Slika 3.6. Ulazni podaci za deskriptivnu statistiku

Na osnovu prethodnih analiza, zaključeno je da je težina sadnica topole u bliskoj zavisnosti od kvadrata njihovih prečnika pomnoženo sa njihovom visinom. Pošto u tabeli, prikazanoj na slici 3.6, postoje podaci za prečnik i visinu, može se izračunati nova promenljiva (težina topole) koristeći opciju **Minitab Calculator**, slika 3.7. Ovaj kalkulator dobijene rezultate na osnovu zadate formule postavlja u kolonu koja se unapred definiše. Takođe, ako se vrednosti promenljive u formuli promene, automatski će se promeniti i rezultati u ćelijama. Postavljanje nove zavisne promenljive se izvodi prema sledećim koracima:

1. Izabere se **Calc > Calculator**
2. Nova promenljiva se nazove **D2H**, tj. u **Store result in variable** se unese **D2H**.
3. Za **Expression** se unese **C1^2*C2**
4. Otkači se **Assign as a formula**, zatim **OK**. Dobijene vredosti će biti upisane u kolonu **D2H**



Slika 3.7. Opcija „Calculator“ i kreiranje nove kolone „D2H“

U slučaju da se želi dodati novih pet merenja Minitab će automatski zapisivati vrednosti za kolonu **D2H**. U tabeli 3.1. dati su rezultati novih pet merenja.

Tabela 3.1. Vrednosti novih pet merenja

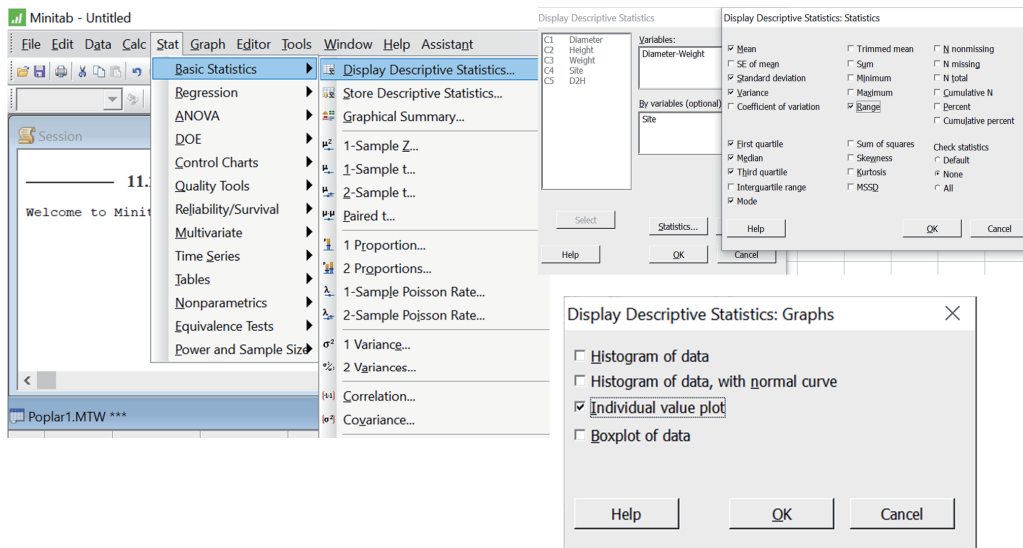
Diameter	Height	Weight	D2H
1,52	2,9	0,07	6,700
4,51	5,27	0,79	107,192
1,18	2,2	0,03	3,063
3,17	4,93	0,44	49,541
3,33	4,89	0,52	54,225

Zatim je potrebno uneti novu promenljivu pod nazivom **Site** (lokacija topole), koja će definisati da li je merenje izvršeno na lokaciji 1 ili lokaciji 2. Prvih 10 merenja su izvršena na lokaciji 1, a drugih 10 na lokaciji 2. Novu kolonu **Site** treba postaviti između kolona **Weight** i **D2H**. Postupak je sledeći:

1. Klikne se na kolonu **D2H** i izabere se **Editor > Insert Columns**. Nova prazna kolona je postavljena levo od kolone **D2H**.
2. Nova kolona se preimenuje u **Site**.
3. U red 1 se unese 1.
4. Postavi se kursor iznad donjeg desnog ugla izabranog polja. Kursor bi trebalo da pređe iz bele u crnu boju što govori da je uključeno automatsko popunjavanje (**autofill mode**).
5. Selektuje se levim klikom 1 i odabere se do 10 reda. Automatski će se popuniti izabrana polja sa vrednošću 1.
6. U red 11 se upiše 2
7. Izabere se do reda 20.

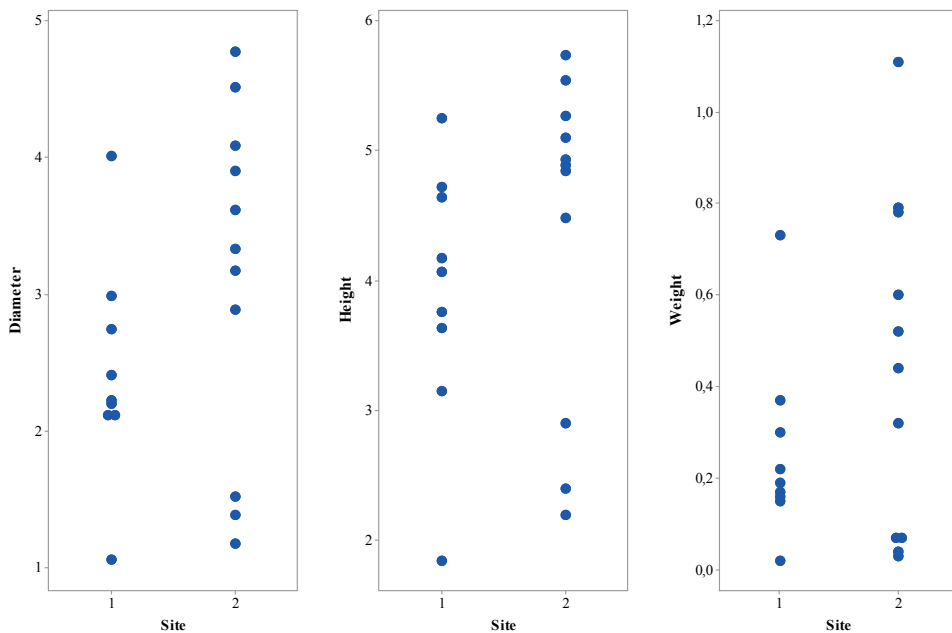
U cilju sprovođenja deskriptivne statistike izmerenih podataka, potrebno je napraviti zbirne tabele za prečnik, visinu i težinu, kako bi se uporedile karakteristike za dve različite lokacije. Procedura je sledeća (slika 3.8.):

1. Izabere se **Stat > Basic statistic > Display Descriptive statistics**
2. U polje **Variables** izabere se **Diameter, Height i Weight**
3. U polju **By variables**, unosi se **Site**. Sa ovim se definiše da se prečnik, visina i debljina posebno računaju za lokaciju (**Site**) 1 i 2
4. Klikne se na **Statistics**
5. Odabere se **Mean** (srednja vrednost), **Standard deviation** (standardna devijacija), **Variance** (varijansa), **First quartile** (prvi kvartil), **Median** (medijana), **Third quartile** (treći kvartil), **Mode** (mod), **Range** (raspon), zatim OK
6. Klikne se na **Graphs**
7. Klikne se na **Individual value plot**, zatim OK



Slika 3.8. Deskriptivna statistika u Minitabu

Minitab će prikazati izlazne vrednosti, kao i grafički prikaz (tri u ovom slučaju) za svaku promenljivu ponaosob, slika 3.9.



Descriptive Statistics: Diameter; Height; Weight										
Variable	Site	Mean	StDev	Variance	Q1	Median	Q3	Range	Mode	N for mode
Diameter	1	2,432	0,796	0,634	2,120	2,230	2,870	2,950	2,12	2
	2	3,125	1,260	1,587	1,520	3,330	4,090	3,590	*	0
Height	1	3,917	1,000	0,999	3,395	4,070	4,680	3,400	*	0
	2	4,389	1,270	1,613	2,900	4,890	5,270	3,530	*	0
Weight	1	0,2567	0,2027	0,0411	0,1550	0,1900	0,3350	0,7100	*	0
	2	0,434	0,365	0,133	0,070	0,440	0,780	1,080	0,07	2

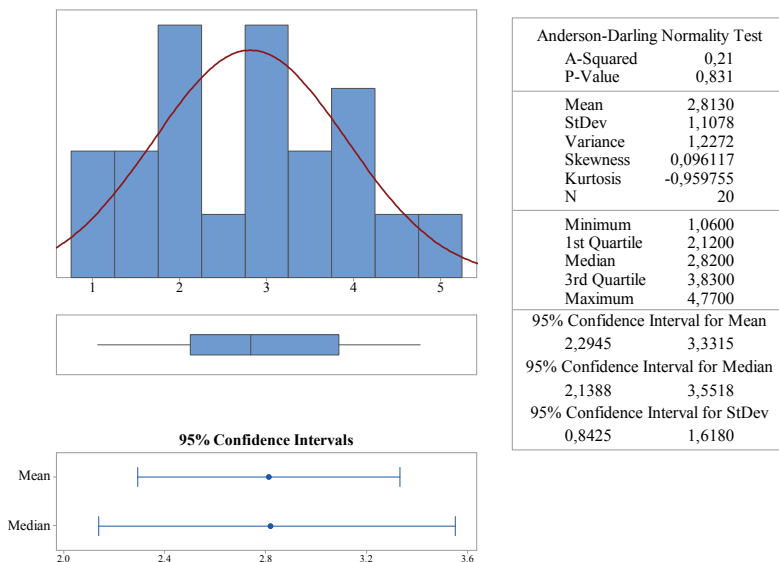
Slika 3.9. Rezultati deskriptivne statistike u Minitabu

Na osnovu dobijenih rezultata, na lokaciji 2 su vrednosti sa većim prečnikom, visinom i debljinom od onih na lokaciji 1. Međutim, velika odstupanja u maksimalnim i prosečnim težinama ukazuju na mogućnost unošenja netačnih podataka. Nastavak daljeg prikaza ovog primera, sledi u potpoglavlju regresiona analiza.

Ako se žele odrediti intervali poverenja za srednju vrednost, medijanu i/ili standardnu devijaciju procedura je sledeća:

1. Izabere se **Stat > Basic Statistics > Graphical Summary**
2. Izabрати npr. **Diameter** kao varijablu a interval poverenja (**confidence level**) ostaviti podrazumevanih 95, zatim **OK**

Kao izlaz dobija se sledeći grafički prikaz, slika 3.10.



Slika 3.10. Sumarni grafički prikaz na promenljivu *Diameter*

Sa slike se može uočiti da je sprovedena kompletna deskriptivna statistika. Prvo se može uočiti histogram sa normalnom raspodelom i box-plot dijagram, zatim u gornjem desnom uglu su dati osnovni statistički pokazatelji, u donjem desnom uglu su date numeričke vrednosti intervala poverenja posebno za srednju vrednost, medijanu i standardnu devijaciju i na dnu slike je dat grafički prikaz intervala poverenja za srednju vrednost i medijanu.

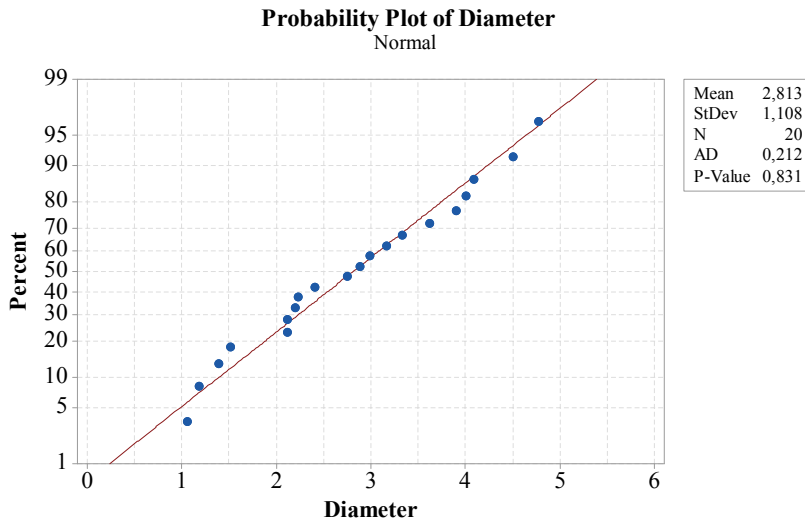
Sumarni grafički prikaz takode daje informaciju da li su podaci raspoređeni po normalnoj raspodeli. Rezultati o ispitivanju normalnosti se nalaze u gornjem desnom uglu i određeni su prema Anderson-Darling (AD) testu. Posmatra se vrednost p koja se poredi sa pragom značajnosti α (uglavnom je 0,05) i postavljaju se sledeće hipoteze

$$H_0: p > \alpha, \text{ podaci imaju normalnu raspodelu}$$

$$H_1: p < \alpha, \text{ podaci nemaju normalnu raspodelu}$$

Ispitivanje da li podaci podležu normalnoj raspodeli može se izvršiti i na sledeći način u Minitabu:

1. Izabere se **Stat > Basic Statistics > Normality Test**
2. Ovde postoji mogućnost izbora testa za proveru normalnosti podataka, tj. pored **Anderson-Darling** testa može se testiranje izvršiti preko **Ryan-Joiner** i **Kolmogorov-Smirnov** testa
3. Izborom **Diameter** kao varijable i jednog od ponuđenih testova i **OK** dobiće se sledeći grafički prikaz, slika 3.11. Sa slike se može uočiti da su podaci raspoređeni po normalnoj raspodeli ($p > 0,05$).



Slika 3.11. *Anderson-Darling test normalnosti*

3.2. Regresiona analiza

Regresiona analiza je statistička metoda kojom se ispituje zavisnost između dve ili više promenljivih, odnosno pojava. Osnovni zadatak regresione analize je da otkrije postojanje veza između posmatranih masovnih pojava, kao i oblik i smer tih veza. Izlaz iz regresione analize je matematički model koji opisuje odnos između jedne ili više nezavisnih promenljivih (X) i zavisne promenljive (Y). Između posmatranih pojava mogu se pojaviti tri oblika veza:

- Linearan, odnosno pravolinijski
- Nelinearan, odnosno krivolinijski i
- Prostorni

Smer veze može da bude pozitivan i negativan. Pozitivan je ako sa porastom vrednosti obeležja nezavisne promenljive raste i vrednost obeležja zavisne promenljive. Negativan je obrnuto od prethodno rečenog. Prema jačini, odnosno intenzitetu veza između obeležja posmatranih pojava, mogu se pojaviti dve vrste veza:

1. Funkcionalna, odnosno matematička (ako jednoj vrednosti obeležja nezavisne promenljive, odgovara jedna i samo jedna vrednost obeležja zavisne promenljive)
2. Korelaciona, stohastička (ako jednoj vrednosti obeležja nezavisne promenljive, ne odgovara tačno jedna vrednost obeležja zavisne promenljive, već više vrednosti obeležja)

Ako se posmatraju dve pojave i ako između njih postoji korelaciona, stohastička veza, pri čemu se originalnim vrednostima obeležja ovih pojava može dobro prilagoditi linearna funkcija, odnosno prava linija, onda se govori o prostoj lineranoj regresiji. Model proste linearne regresije sa jednom nezavisnom promenljivom ima oblik jednačine 3.6:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad (3.6.)$$

gde je:

- Y_i - vrednost zavisne promenljive na i -tom elementu uzorka
- β_0 i β_1 – regresioni parametri
- X_i - vrednost nezavisne promenljive na i -tom elementu uzorka
- ε_i - slučajna greška

Za model (3.6.) se kaže da je prost, linearan u odnosu na parametre i linearan u odnosu na nezavisnu promenljivu. Prost je jer ima samo jednu nezavisnu promenljivu, linearan u odnosu na parametre jer predstavlja linearnu funkciju posmatranu kao funkciju od parametara i linearan u odnosu na nezavisnu promenljivu jer je i linearna funkcija kada se posmatra kao funkcija od promenljive X . Model koji je linearan u odnosu na parametre i nezavisnu promenljivu se zove model prvog reda. Regresiona analiza se bazira na metodi najmanjih kvadrata (zbir kvadrata tačaka sa jedne strane regresione linije treba da je sličan zbiru kvadrata rastojanja tačaka sa druge strane linije). Oblik linije regresionog modela je onaj koji najbolje „fituje“ (uklapa) eksperimentalne rezultate.

Ako se ispituje zavisnost jedne pojave od dva ili više nezavisnih parametara, onda se govori o višestrukoj linearnoj regresiji. Regresija koja sadrži više od jedne nezavisne varijable x naziva se višestruka linearna regresija. Značaj regresione analize se ogleda u njenoj mogućnosti da prepozna u kakvoj su vezi nezavisne i zavisna promenljiva, i da li postoji njihova međusobna interakcija. Takođe, veliki je značaj primena regresione analize jer uspostavlja model za predviđanje ponašanja nekih pojava ili podataka u budućnosti.

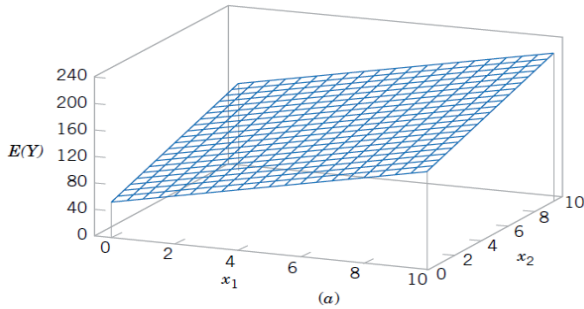
Ako se ispituje međusobna veza između više promenljivih, od kojih je jedna zavisna promenljiva ili posledica koja se obeležava sa Y , a ostale pojave su nezavisne pojave ili uzroci x_1, x_2 , onda se može formirati višestruki regresioni model.

Na primer, pretpostavimo da postojanost reznog alata zavisi od brzine i lednog ugla rezanja. Regresioni model koji opisuje ovu vezu se sastoji od Y koje predstavlja postojanost alata, x_1 predstavlja brzinu rezanja, a x_2 predstavlja ledni ugao rezanja, a e je slučajna greška. Ovo je model višestruke linearne regresije sa dve promenljive, a linearan je jer je regresiona funkcija linearna po koeficijentima β , jednačina 3.7:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e. \quad (3.7.)$$

Ovaj model je opisan pomoću ravni u tri dimenzije Y , x_1 i x_2 . Na slici 3.12. je prikazana ravan čija je jednačina, 3.8.

$$E(Y) = 50 + 10x_1 + 7x_2. \quad (3.8.)$$



Slika 3.12. Ravan regresije prikazuje model $E(Y) = 50 + 10x_1 + 7x_2$

Pretpostavljeno je da je vrednost greške jednaka nuli. Parametar β_0 je slobodan član i pokazuje tačku u kojoj osa x_1 preseca ravan. Parametri β_1 i β_2 se nazivaju parcijalni regresioni koeficijenti zato što je β_1 mera očekivanih promena na Y kada se menja x_1 , a kada je x_2 konstantno. Parametar β_2 je mera očekivanih promena na Y kada se menja x_2 , a kada je x_1 konstantno.

Generalno, zavisna promenljiva Y ili tzv. promenljiva odziva može biti povezana sa k nezavisnih ili regresionih varijabli. Model dat jednačinom 3.9:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k, \quad (3.9.)$$

se naziva višestruka linearna regresija sa k regresionim varijablama. Parametri β_j , $j=0,1,\dots,k$ se nazivaju regresioni koeficijenti.

Modeli višestruke linearne regresije se koriste kao funkcija aproksimacije. Pravi odnos između Y i x_1 , x_2 , x_k je nepoznat, ali pod određenim rasponima vrednosti se mogu aproksimirati i dobiti približne vrednosti. Modeli koji su složenije strukture od modela iz jednačine 3.9. u većini slučajeva se mogu analizirati tehnikama višestruke linearne regresije kao što je npr. model kubnog polinoma (jednačina 3.10.) i/ili model koji uključuje efekte interakcije (jednačina 3.11.). Generalno, svaki regresioni model koji je linearan u parametrima β je linearan regresioni model, bez obzira na oblik površine koju generiše.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon \quad (3.10.)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \quad (3.11.)$$

3.2.1. Matrični pristup u višestrukoj linearnoj regresiji

U višestrukoj linearnoj regresiji mnogo je jednostavnije da se za zapis matematičkih operacija koristi matrični zapis. Pretpostavimo da postoji k regresionih varijabli i n opservacija $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i)$ $i=1, 2, \dots, n$, a model koji povezuje promenljive je dat jednačinom 3.12:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + e_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.12.)$$

Ovaj model je sistem od n jednačina koji se može izraziti u matričnom zapisu, jednačina 3.13:

$$Y = X\beta + e \quad (3.13.)$$

gde je:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Uopšteno, y je $(n \times 1)$ vektor opservacija, X je $(n \times p)$ matrica nivoa nezavisnih promenljivih, β je $(p \times 1)$ vektor regresionih koeficijenata, a e je $(n \times 1)$ vektor slučajnih grešaka.

Vektor najmanjih kvadrata za ocenu $\hat{\beta}$ koeficijenta se dobija minimiziranjem (jednačina 3.14):

$$L = \sum_{i=1}^n e_i^2 = e' e = (y - X\beta)'(y - X\beta) \quad (3.14.)$$

Najmanji kvadrati koeficijenta $\hat{\beta}$ su rešenje β iz jednačine 3.15:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad (3.15.)$$

Dobijene jednačine koje se moraju rešiti, date su jednačinom 3.16:

$$X'X\hat{\beta} = X'y \quad (3.16.)$$

Jednačine 3.16. su normalne jednačine najmanjih kvadrata u matričnom obliku.

Jednačina 3.16. je zapravo jednačina 3.17. (skalarni oblik jednačine):

$$\begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} &= \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{aligned} \quad (3.17.)$$

samo zapisana u obliku matrice. Da bi se rešile ove jednačine potrebno je pomnožiti obe strane sa inverzijom matrice $X'X$. Tada je dobijeno da je kvadratna ocena parametra β jednaka, jednačina 3.18:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y. \quad (3.18.)$$

Postoji $p=k+1$ normalnih jednačina u $p=k+1$ nepoznatih (vrednosti $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$). Matrica $X'X$ je uvek regularna matrica i koristi se kako bi se dobila inverzna matrica $(X'X)^{-1}$.

Matrični i skalarni oblik normalne jednačine su identični, samo su zapisani na drugačiji način. Tako da jednačina 3.16. može detaljnije da se napiše na sledeći način, jednačina 3.19:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{bmatrix}. \quad (3.19.)$$

U ovom obliku lakše se vidi da je $X'X$ ($p \times p$) simetrična matrica i da je $X'y$ ($p \times 1$) vektor kolona. Matrica $X'X$ ima specifičnu strukturu. Dijagonalni elementi $X'X$ predstavljaju sumu kvadrata elemenata koji se nalaze u X koloni, a elementi koji se ne nalaze dijagonalno su suma unakrsnih proizvoda elemenata iz X kolone. Elementi $X'y$ su suma unakrsnih proizvoda elemenata iz kolone X i opservacija (y_i). Dobijeni (fitovani) regresioni model je, jednačina 3.20:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (3.20.)$$

ili u matričnom obliku, jednačina 3.21:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}. \quad (3.21.)$$

Razlika između posmatrane vrednosti y_i i fitovane vrednosti $\hat{y}_i$ je residual tj. greška $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Vektor reziduala se označava kao, jednačina 3.22:

$$e = y - \hat{y}. \quad (3.22.)$$

3.2.2. Testiranje hipoteza u modelu višestruke linearne regresije

Testiranje hipoteza u (višestrukoj) linearnoj regresiji je korisno za određivanje adekvatnosti modela. Prvo se sprovodi test o značajnosti regresionih varijabli. Test značajnosti se koristi kako bi se utvrdilo da li postoji veza između promenljive odgovora y (zavisne) i regresionih promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_k$. Odgovarajuće hipoteze su:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \beta_j \neq 0 \text{ za najmanje jedno } j$$

Odbacivanje $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ podrazumeva da najmanje jedan od regresionih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_k$ doprinosi značajnosti modela. Ukupna suma kvadrata SS_T je podeljena na SS_R (regresiona suma kvadrata) i SS_E (suma kvadrata greške).

$$SS_T = SS_R + SS_E.$$

Ako je $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ tačno, onda sledi da je SS_R/δ^2 *hi*-kvadrat slučajna promenljiva sa k stepeni slobode. Može da se primeti da je broj stepeni slobode *hi*-kvadrat slučajne promenljive jednak broju regresionih promenljivih u modelu. Takođe pokazano je da je SS_E/δ^2 *hi*-kvadrat slučajna promenljiva sa $n-p$ stepeni slobode i da su SS_R i SS_E nezavisne. Test statistika za $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ je, jednačina 3.23:

$$F_o = \frac{SS_R/k}{SS_E/(n-p)} = \frac{MS_R}{MS_E}. \quad (3.23.)$$

Hipoteza H_0 se odbacuje ako je f_o veće od $f_{\alpha, k, n-p}$ (biće kasnije objašnjeno u poglavlju ANOVA). Postupak testa značajnosti je rezimiran u tabeli 3.2.

Tabela 3.2. ANOVA tabela testa značajnosti kod regresione analize

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F_o
Regresija	SS_R	k	MS_R	MS_R/MS_E
Greška ili rezidual	SS_E	$n-p$	MS_E	
Ukupno	SS_T	$n-1$		

3.2.3. Koeficijent determinacije R^2 (adekvatnost modela)

Koeficijent determinacije R^2 se koristi kao mera reprezentativnosti regresionog modela. To je relativna mera i pokazuje koliko su varijacije promenljive y objašnjene sa promenljivom x . Što je vrednost R^2 veća to je model bolji, za $R^2=1$ (u Minitabu je to vrednost *R-sq*) se dobija model bez uticaja greške, tj. ne postoje slučajne greške. Vrednost koeficijenta determinacije se dobija koristeći jednačinu 3.24:

$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = 1 - \frac{SS_E}{SS_T}. \quad (3.24.)$$

Nedostatak je što dodavanjem bilo koje nove ulazne promenljive, čak i nebitne, dolazi do povećanja koeficijenta determinacije. Iz tog razloga se uvodi prilagođeni koeficijent determinacije

R_{pril}^2 koji predstavlja modifikovani R^2 koji nije osetljiv na povećanje broja ulaznih promenljivih u modelu (u Minitabu je to vrednost $R-sq_{adj}$). Ako se R_{pril}^2 i R^2 značajno razlikuju, to je pokazatelj da u modelu postoje delovi koji ne utiču na izlaznu karakteristiku y . R_{pril}^2 je korisno koristiti ako se porede modeli sa različitim brojem ulaznih promenljivih. Računa se na sledeći način, jednačina 3.25:

$$R_{pril}^2 = 1 - \frac{SS_E / (n-p)}{SS_T / (n-1)}. \quad (3.25.)$$

U ovom slučaju model se povećava jedino ako se dodaju promenljive koje smanjuju srednju kvadratnu grešku.

Takođe se koristi i R^2 predikcije (R_{pred}^2) koji predstavlja meru koliko dobro model predviđa odziv za nove vrednosti ulaznih promenljivih. Velika razlika između R_{pred}^2 i druga dva koeficijenta determinacije može ukazati na to da je model preopterećen. Preopterećen model ne predviđa nove opservacije ni približno tako dobro kao što fituje postojeće podatke.

Za ocenu adekvatnosti modela koristi se i veličina S koja se meri u jedinicama izlazne promenljive i predstavlja standardno rastojanje vrednosti podataka od regresione linije. Generalno, što regresiona jednačina bolje predviđa odziv, vrednost S je niža.

3.2.4. Intervali poverenja u višestrukoj linearnoj regresiji

U višestrukom regresionom modelu korisno je proceniti interval poverenja za regresione koeficijente β_j . Za razvoj postupka dobijanja intervala poverenja neophodno je da greške e_i imaju normalnu i nezavisnu funkciju gustine raspodele verovatnoće sa srednjom vrednošću nula i varijansom σ^2 . Ista ova pretpostavka je potrebna za testiranje hipoteza. Znači, Y_i je normalno i nezavisno rasprostranjena sa srednjom vrednošću $\beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j X_{ij}$ i varijansom σ^2 . Pošto je ocena najmanjih kvadrata koeficijenata $\hat{\beta}$ linearna kombinacija opservacija iz toga sledi da je $\hat{\beta}$ koeficijent normalno rasprostranjen sa srednjom vrednošću vektora β i matricom kovarijanse $\sigma^2 (X'X)^{-1}$. Zatim svaka statistika (jednačina 3.26)

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}} \quad j=0,1,\dots,k \quad (3.26)$$

ima t -raspodelu sa $n-p$ stepeni slobode, gde C_{jj} je jj -ti element matrice $(X'X)^{-1}$, $\hat{\sigma}^2$ -ocena greške varijanse. Iz ovoga sledi da interval poverenja regresionih koeficijenata β_j , $j=0,1,2,\dots,k$, iznosi $100(1-\alpha)\%$.

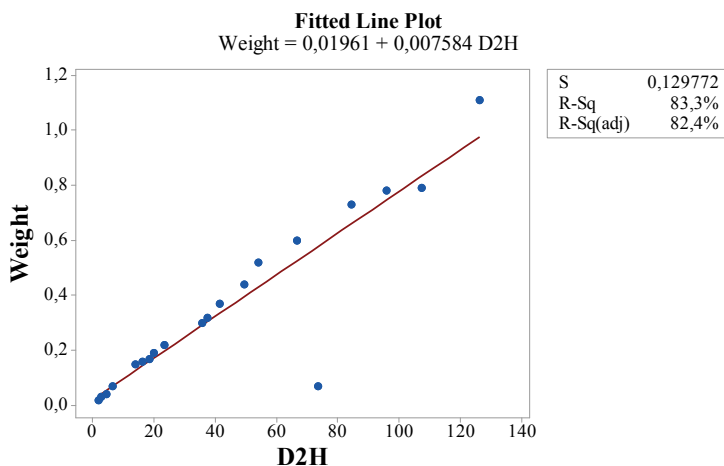
Definicija: $100 \times (1-\alpha)\%$ je interval poverenja za regresione koeficijente β_j , $j=0,1,2,\dots,k$. U višestrukom regresionom modelu interval poverenja je dat preko jednačine 3.27:

$$\hat{\beta}_j - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \quad (3.27)$$

3.2.5. Primer regresione analize u Minitabu-prost linearan model

Za sprovođenje proste linearne regresije koristiće se podaci iz primera **POPLARI**. Da bi se mogla tačnije pretpostaviti težina, potrebno je definisati zavisnost između **D2H** i **Weight**. U cilju provere da li postoji takva zavisnost, kao i koliko je ona precizna, potrebno je napraviti dijagram prema sledećim koracima:

1. Izabere se **Stat > Regression > Fitted Line Plot**
2. Za **Response (Y)** ukuca se **Weight**
3. Za **Response (X)**, ukuca se **D2H**, zatim OK.



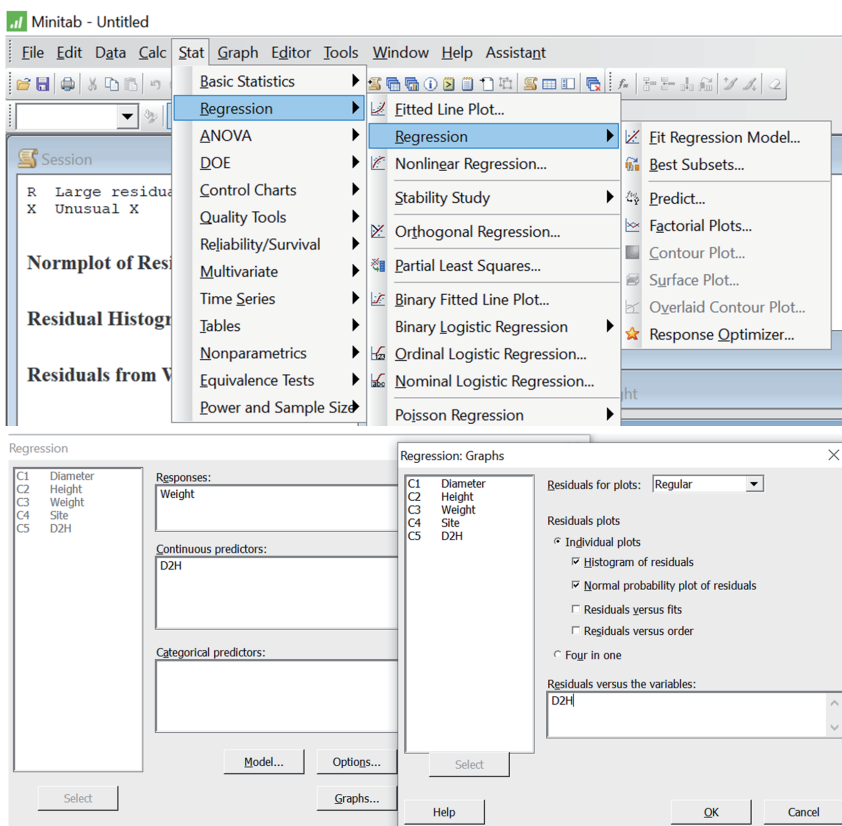
Slika 3.13. Linearna zavisnost između težine i D2H

Sa dobijenog dijagrama, slika 3.13., može se uočiti linearna zavisnost između **Weight** i **D2H**. Vrednost **R-Sq** pokazuje da **D2H** odgovara za 83.3 % varijacije težine. Većina tačaka prati ovu zavisnost, osim njih par koje odstupaju.

U prethodnom koraku je prikazano da kako se **D2H** povećava, povećava se i težina. Sad će se prikazati koliko tačno se na osnovu vrednosti **D2H** može predvideti težina sadnice.

1. Izabere se **Stat > Regression > Regression > Fit Regression Model**
2. Za **Response**, unese se **Weight**.
3. Za **Continuous Predictors**, unese se **D2H**, sledeća serija dijagrama će uočiti eventualne probleme.

4. Klikne se na **Graphs**
5. Pod **Residual for Plots**, izabere se **Standardized**
6. Pod **Residual plots**, izabere se **Histogram of residual** i **Normal probability plot of residuals**
7. U polju **Residuals versus the variavles** se izabere **D2H**
8. Zatim **OK** u svakom prozoru, slika 3.14.



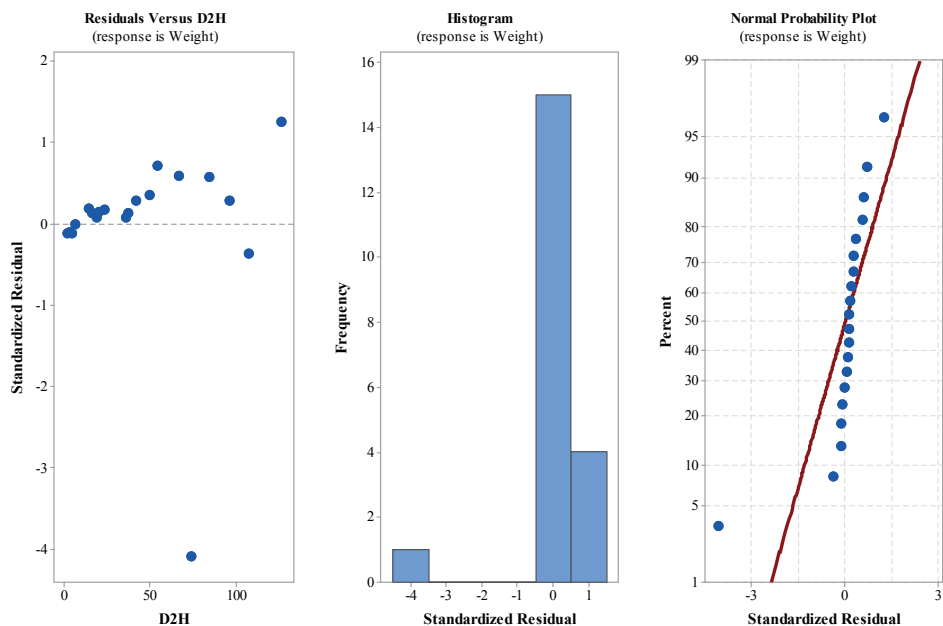
Slika 3.14. Postupak sprovođenja regresione analize u Minitabu

Na slici 3.14. se može uočiti da se ulazne promenljive mogu razvrstati kao kontinuirane (numeričke) i kategoričke (atributivne) promenljive što može biti čest slučaj pri eksperimentalnom ispitivanju. Kao izlaz, Minitab prikazuje jednačinu linearne regresije, tabelu sa koeficijentima, tabelu analize varijanse i tabelu sa neobičnim posmatranjima (*unusual observations*) - one koje najviše odstupaju od proseka (na njih posebno treba obratiti pažnju i proveriti tačnost unetih vrednosti), slika 3.15.

Regression Analysis: Weight versus D2H					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	1	1,5155	1,51555	89,99	0,000
D2H	1	1,5155	1,51555	89,99	0,000
Error	18	0,3031	0,01684		
Total	19	1,8187			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,129772	83,33 %	82,41 %	79,29 %		
Coefficients					
Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	0,0196	0,0457	0,43	0,673	
D2H	0,007584	0,000799	9,49	0,000	1
Regression Equation					
Weight = 0,0196 +0,007584D2H					
Fits and Diagnostics for Unusual Observations					
Obs	Weight	Fit	Resid	Std Resid	
12	1,1100	0,9756	0,1344	1,24	X
15	0,0700	0,5779	-0,5079	-4,09	R
R Large residual					
X Unusual X					

Slika 3.15. Regresiona analiza u Minitabu

Minitab takođe prikazuje i tri dijagrama. Na njima se vidi postojanje unetog podatka koji značajno odstupa u odnosu na ostale vrednosti.



Slika 3.16. Grafički izlaz iz regresione analize u Minitab-u

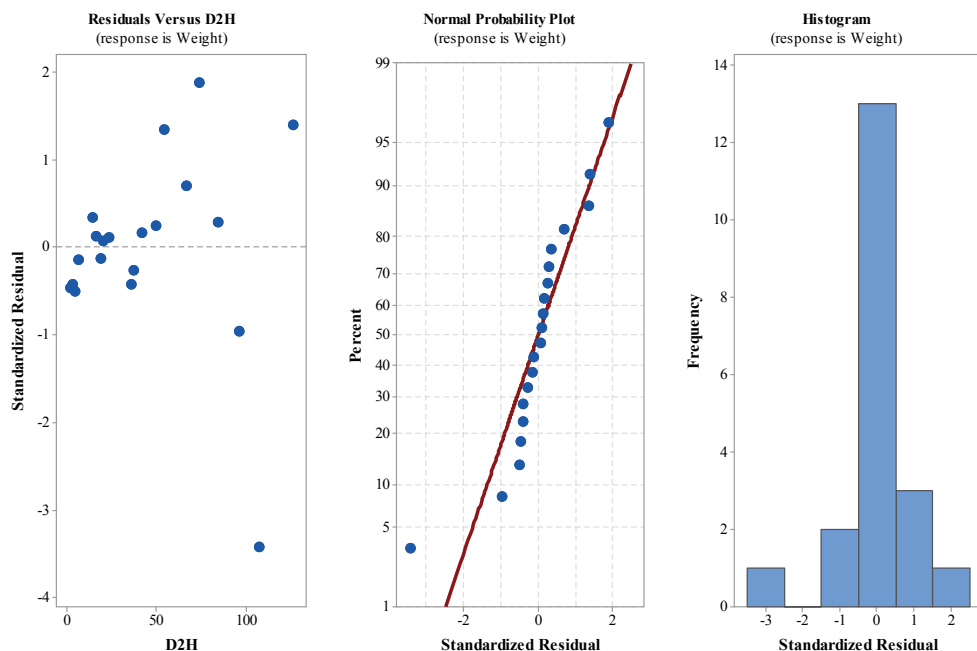
U prethodnom koraku nađena su dva neobična rezultata merenja (redovi 12 i 15). Potrebno je proveriti tačnost ovih unetih podataka. Analizom ova dva podatka utvrđeno je da u redu 15 došlo do greške pri unošenju podatka i tako umesto vrednosti 0,07 treba da bude uneto 0,7. Nakon toga se ponovo sprovodi regresiona analiza kao u prethodnom koraku, slika 3.17.

Regression Analysis: Weight versus D2H					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	1	1,81080	1,81080	1202,88	0,000
D2H	1	1,81080	1,81080	1202,88	0,000
Error	18	0,02710	0,00151		
Total	19	1,83789			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,0387993	98,53 %	98,44 %	97,86 %		
Coefficients					
Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	0,0200	0,0137	1,46	0,160	
D2H	0,008290	0,000239	34,68	0,000	1
Regression Equation					
Weight = 0,0200 +0,008290D2H					
Fits and Diagnostics for Unusual Observations					
Obs	Weight	Fit	Resid	Std Resid	
12	1,1100	1,0649	0,0451	1,39	X
17	0,0790	0,9086	-0,1186	-3,42	R
R	Large residual				
X	Unusual X				

Slika 3.17. Ponovljeni postupak regresione analize u minitabu

Ako je dobijen dobar model i ako su zadovoljene statističke pretpostavke, tada se može sa velikom sigurnošću pretpostaviti težina na osnovu izmerenog prečnika i visine.

Iz izlaznog prozora regresije može se uočiti visoka t - vrednost i niska vrednost p za **D2H**, što je jak dokaz postojanja relacije između **D2H** i **Weight**. Visoke vrednosti za **R-Sq** i **R-Sq (adj)** od preko 98 % potvrđuje postojanje snažne linearne relacije između **D2H** i **Weight**. Pre donošenja konačne odluke moraju se pogledati grafici, slika 3.18.



Slika 3.18. Grafički izlazi iz regresione analize nakon korekcije podataka

Iz grafika *residuals versus D2H* se vidi da varijacija nije konstantna, što je značajna pretpostavka koju je model regresije morao da ispuni. Varijacija postaje veća kako se *D2H* povećava.

3.2.6. Primer regresione analize u Minitabu-višestrukim linearnim modelima

Primer višestruke linearne regresije je preuzet iz naučnog rada DOI: 10.17222/mit.2017.152. U ovom radu vršeno je eksperimentalno određivanje koeficijenta emisivnosti za leguru aluminijuma AlSi1MgMn u zavisnosti od temperature i površinske hrapavosti. Koeficijent emisivnosti je bezdimenzionalna veličina koja je karakteristika materijala i vezuje se za emitovanje infracrvenog zračenja koje se koristi pri radu beskontaktnih uređaja za merenje temperature npr. termovizijske kamere. Vrednost koeficijenta emisivnosti se kreće od 0 do 1 i zavisi, pored materijala, i od pomenutih ulaznih promenljivih. Netačna vrednost koeficijenta emisivnosti će dovesti do velike greške pri merenju temperature. Eksperiment je sproveden na četiri aluminijumske ploče različite vrednosti hrapavosti izražene preko *Ra*, koje su zagrevane na šesnaest različitih temperatura. Vrednosti srednje vrednosti hrapavosti su date u tabeli 3.3. Koeficijent emisivnosti je određen eksperimentalno, tj. emisivnost je određena u softveru termovizijske kamere tako što se ona podešavala do vrednosti kada se temperatura, merena sa termovizijskom kamerom, ne izjednači sa referentnom temperaturom (kontaktnim instrumentom-termoparom). Rezultati istraživanja su prikazani u tabeli 3.4.

Tabela 3.3 Površinska hrapavost, $\bar{R}_a$ za AlSi1MgMn

oznaka uzorka	$\bar{R}_a$ u μm
A1	1,07
A2	1,25
A3	1,55
A4	1,77

Tabela 3.4 Emisivnost AlSi1MgMn u zavisnosti od temperature T i hrapavosti $\bar{R}_a$

T u $^{\circ}\text{C}$	Koeficijent emisivnosti ε			
	A1	A2	A3	A4
50	0,09	0,10	0,09	0,16
60	0,09	0,10	0,09	0,16
70	0,09	0,10	0,09	0,16
80	0,09	0,10	0,09	0,16
90	0,09	0,10	0,10	0,16
100	0,09	0,10	0,11	0,16
110	0,09	0,10	0,12	0,16
120	0,09	0,12	0,14	0,16
130	0,10	0,13	0,14	0,16
140	0,10	0,13	0,14	0,16
150	0,10	0,15	0,15	0,16
160	0,11	0,15	0,16	0,17
170	0,12	0,17	0,17	0,18
180	0,13	0,17	0,18	0,19
190	0,13	0,18	0,18	0,22
200	0,13	0,19	0,19	0,24

Za sprovođenje regresione analize i dobijanje modela koristi se ista procedura prikazana na slici 3.14. s tim što u ovom slučaju postoje dve kontinuirane promenljive (hrapavost i temperatura). Iz tabele 3.4. se može zaključiti da je ukupno razmatrano 64 posmatranja (eksperimenata). Treba napomenuti da se podaci u Minitab unose u tri kolone, a deo unesenih podataka je prikazan na slici 3.19. Izlaz iz regresione analize prikazan je na slici 3.20.

↓	C1	C2	C3
	Temperatura	Hrapavost	Emisivnost
1	50	1,07	0,09
2	60	1,07	0,09
3	70	1,07	0,09
4	80	1,07	0,09
5	90	1,07	0,09
6	100	1,07	0,09
7	110	1,07	0,09
8	120	1,07	0,09
9	130	1,07	0,10
10	140	1,07	0,10
11	150	1,07	0,10
12	160	1,07	0,11
13	170	1,07	0,12
14	180	1,07	0,13

Slika 3.19. *Unos podataka u Minitab*

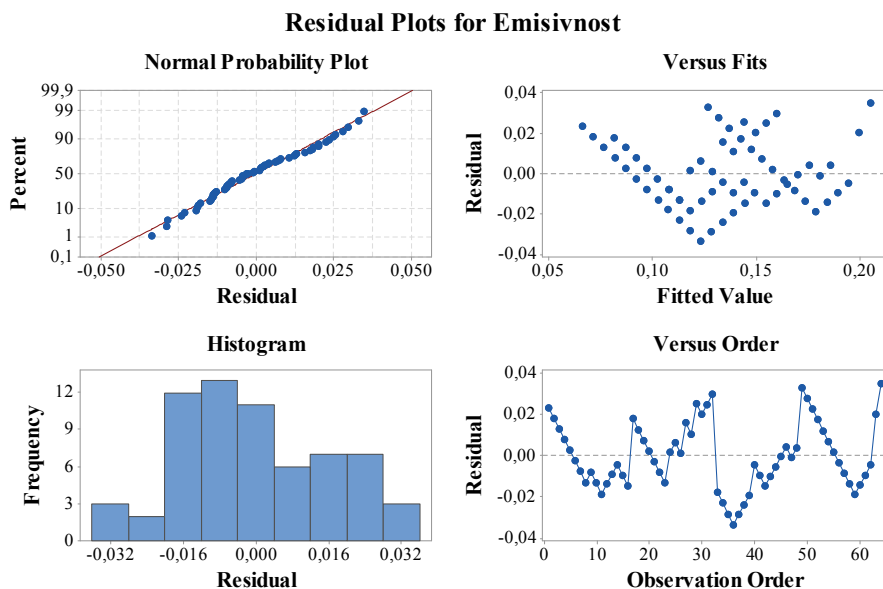
Analizom dijagrama (slika 3.20. dole) može se zaključiti da reziduali imaju normalnu raspodelu i pokazuju ispravnost postavljenog modela. Za dobijanje ovog dijagrama potrebno je u opciji **Graphs**, prikazanoj na slici 3.14, izabrati opciju **Four in One**.

Gornji deo slike 3.20. sadrži analizu varijanse iz koje se može zaključiti da obe ulazne promenljive su statistički značajne za razmatrani izlaz ($p < 0,05$) tj. da je procenat objašnjene varijanse izuzetno značajan.

U drugoj tabeli u prvoj koloni su regresioni koeficijenti i t - test za nultu hipotezu $H_0 = 0$. Vrednosti koje su negativne nemaju uticaja kao i one koje imaju vrednost manju od tablične, u ovom slučaju obe promenljive su statistički značajne. Odnosno p vrednost im je manja od 0,05.

Vrednost R - Sq ukazuje da sve nezavisne promenljive koje su uključene u model objašnjavaju 80.94 % varijanse zavisne promenljive. Takođe se dobija jednačina linearnog višestrukog modela oblika: $Emisivnost = -0,0520 + 0,000521 \times Temperatura + 0,08635 \times Hrapavost$.

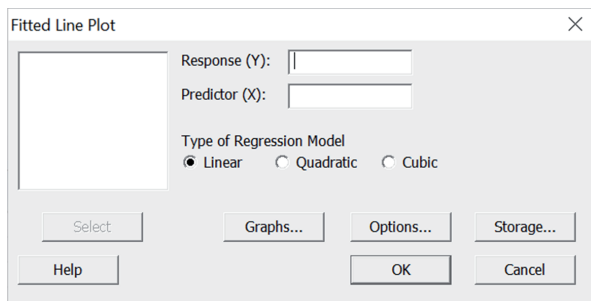
Regression Analysis:Emisivnost versus Temperatura, Hrapavost-Ra					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	2	0,07155	0,035776	129,54	0,000
Temperatura	1	0,036910	0,036910	133,65	0,000
Hrapavost-Ra	1	0,03464	0,034642	125,44	0,000
Total	61	0,01685	0,000276		
Total	63	0,08840			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,0166184	80,94 %	80,32 %	78,68 %		
Coefficients					
Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	-0,0520	0,0124	-4,19	0,000	
Temperatura	0,000521	0,000045	11,56	0,000	1.00
Hrapavost-Ra	0,08635	0,00771	11,20		1.00
Regression Equation					
Emisivnost = -0,0520+0,000521Temperatura+0,08635Hrapavost-Ra					
Fits and Diagnostics for Unusual Observations					
Obs	Emisivnost	Fit	Resid	Std Resid	
36	0,09000	0,12349	-0,03349	-2.05	R
49	0,16000	0,12686	0,03314	2,08	R
64	0,24000	0,20500	0,03500	2,20	R
R Large residual					



Slika 3.20. Rezultati višestruke regresione analize u Minitab-u

3.2.7. Primer regresione analize u Minitabu-kvadratni i kubni model

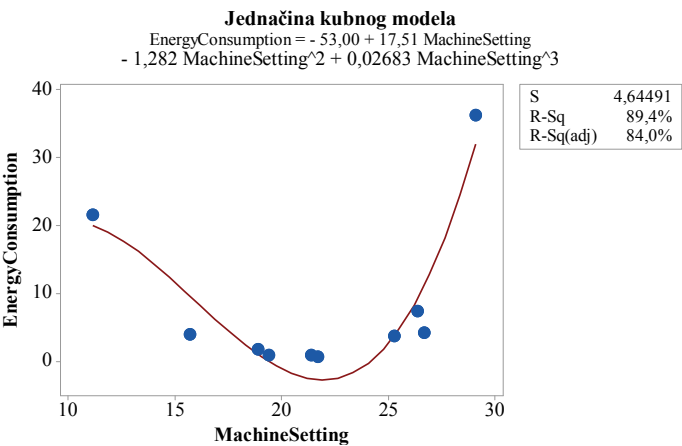
U Minitabu postoji pogaćnost izbora sledećih regresionih modela: linearni, kvadratni i kubni (*Stat > Regression > Fitted Line Plot*), slika 3.21.



Slika 3.21. Izbor regresionog modela u Minitabu

Izbor adekvatnog modela biće prezentovan na podacima koji se nalaze u fajlu *Exh_regr.MTW*. Za ulaznu promenljivu (X) se izabere *MachineSetting*, a za izlaznu promenljivu (Y) *EnergyConsumption*. Model je u svakom slučaju prost, jer ima samo jednu ulaznu promenljivu. Prvo se bira kubni model, a zatim se pritisne opcija **OK**. Kao izlaz se dobija dijagram, jednačina kubnog modela i koeficijent determinacije (adekvatnost modela), slika 3.22. Ako se pogleda radni prozor

uočiće se da kubni model nije statistički značajan, jer je $p=0,055$, slika 3.23. Takođe sa slike 3.23. se može zaključiti da i eventualni linearni model nije statistički signifikantan, a da kvadratni model jeste.

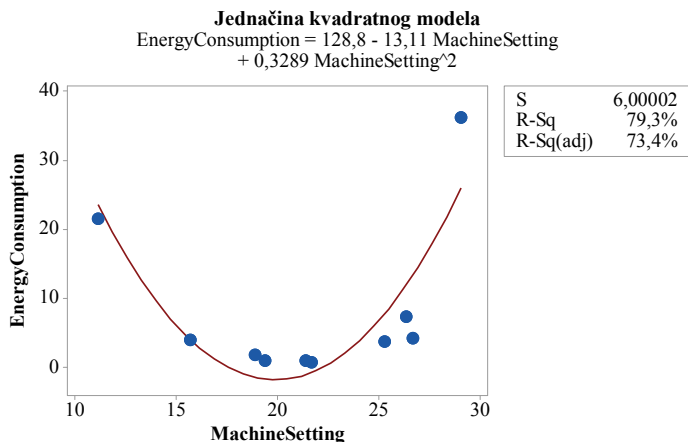


Slika 3.22. Kubni regresioni model

Sequential Analysis of Variance				
Source	DF	SS	F	p
Linear	1	28,500	0,19	0,673
Quadratic	1	935,308	25,98	0,001
Cubic	1	122,550	5,68	0,055

Slika 3.23. Statistička nesignifikantnost kubnog modela

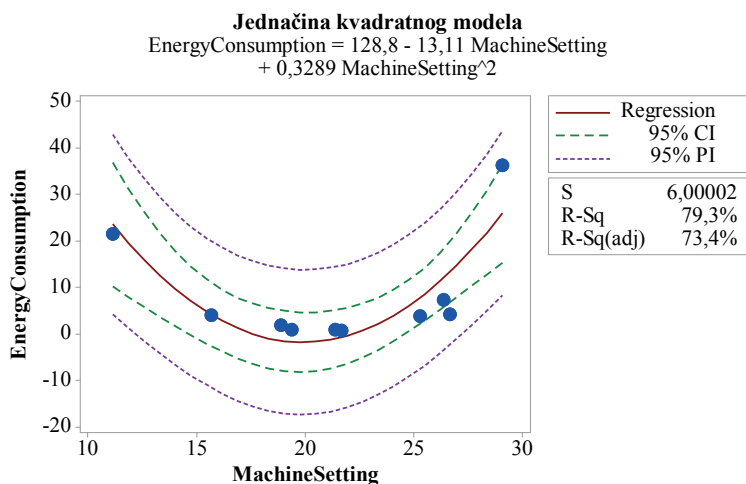
Zatim je potrebno izabrati kvadrati model po gore opisanom principu i dobiće se sledeći rezultati, slika 3.24.



Slika 3.24. Kvadratni regresioni model

Međutim, sa slike 3.22. i slike 3.24. može se zaključiti da veći koeficijent determinacije ima kubni model iako nije statistički signifikantan. Kada se želi na dijagram kvadratnog modela, dodati intervali poverenja i predviđanja, procedura je sledeća:

1. Izabere se **Stat > Regression > Fitted Line Plot > Options**
2. Aktiviraju se polja **Display confidence interval** i **Display prediction interval** (interval poverenja 95) u **Display Options**
3. Zatim **OK** i dobija se dijagram prikazan na slici 3.25



Slika 3.25. Kvadratni model sa intervalima poverenja i predviđanja

Zelena isprekidana linija predstavlja interval poverenja za srednju vrednost. Interval predviđanja (isprekidana ljubičasta linija) daje granice poverenja za individualne tačke. Prema slici 3.25, sa 95 % se može tvrditi da individualne tačke „upadaju“ u interval predviđanja.

3.2.8. *Nelinearna regresija*

Nelinearna regresija kreira jednačinu u cilju opisivanja nelinearne veze između neprekidne zavisne promenljive (y) i jedne ili više nezavisnih promenljivih ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) i predviđa nove observacije. Nelinearna regresija se koristi kada se ne može modelovati veza sa linearnim parametrima. Linearni modeli imaju samo sabirke sa jednim parametrom u njima.

Glavna razlika između linearne i nelinearne regresije su dopustivi oblici funkcije modela. Linearni modeli zahtevaju linearne činioce u jednačini, dok činioci na višem stepenu ne postoje. Primer modela nelinearne regresije dat je jednačinom 3.27:

$$y = \theta_1 - \theta_2 \cdot (\ln(X_1 + \theta_3) - \ln(X_2)) \quad (3.27.)$$

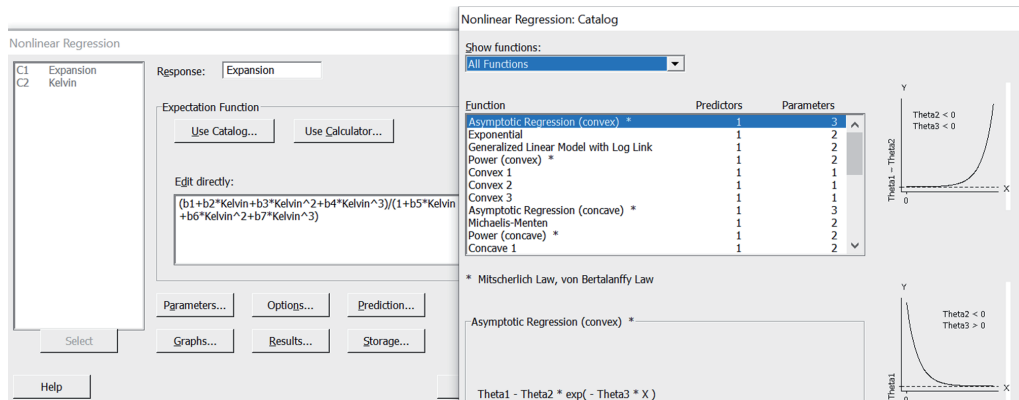
Izbor jednačine za nelinearnu regresiju zavisi od prethodnog iskustva o zakonima ponašanja zavisne promenljive y . Nelinearna regresija pruža fleksibilnost u definisanju velikog broja različitih nelinearnih funkcija.

Primer: Istraživači iz Instituta za standardizaciju i tehnologiju (NIST) žele da ispitaju zavisnost između koeficijenta termičkog širenja bakra (Cu) i temperature u kelvinima (K°). Prethodna istraživanja pokazuju da nelinearan model sa sedam parametara dovoljno dobro opisuje podatke. Istraživači su iskoristili nelinearnu regresiju kako bi procenili parametre u modelu. Postupak izbora nelinearnog modela u Minitabu je sledeći:

1. Otvori se fajl **CopperExpansion** koji se nalazi u **Sample Data Folderu** Minitabu, zatim
2. **Stat > Regression > Nonlinear Regression**
3. Za **Response** se izabere **Expansion**
4. U polje **Edit directly**, prekopirati ili uneti ručno sledeću jednačinu.

$$(b1 + b2 * Kelvin + b3 * Kelvin^2 + b4 * Kelvin^3) / (1 + b5 * Kelvin + b6 * Kelvin^2 + b7 * Kelvin^3)$$

Direktno unošenje jednačine je jedna od opcija, a druga je da se koristi katalog (**Use catalog**) koristeći neku od ponuđenih funkcija, slika 3.25, ili da se koristi kalkulator (**Use calculator**).



Slika 3.25. Katalog funkcija nelinearne regresije u Minitabu

5. Kliknuti opciju **Parameters**.
6. U tražene početne uslove, tj. polje **Required starting values**, uneti sledeće vrednosti iz tabele 3.6, slika 3.26.

Tabela 3.6. Zahtevane početne vrednosti

Parametri	Vrednosti
b_1	1
b_2	-0.1
b_3	0.005
b_4	$-1e-6$
b_5	-0.005
b_6	0.001
b_7	$-1e-7$

C1 Expansion

C2 Kelvin

Response: Expansion

Expectation Function

Use Catalog...

Use Calculator...

Edit directly:

(b1+b2*Kelvin+b3*Kelvin^2+b4*Kelvin^3)/(1+b5*Kelvin+b6*Kelvin^2+b7*Kelvin^3)

Parameters...

Options...

Prediction...

Graphs...

Results...

Storage...

Select

Help

Nonlinear Regression: Parameters

Function

(b1+b2*Kelvin+b3*Kelvin^2+b4*Kelvin^3)/(1+b5*Kelvin+b6*Kelvin^2+b7*Kelvin^3)

Required starting values:

Parameter	Values	Locked
b4	-1e-6	☐
b5	-0,005	☐
b6	0,001	☐
b7	-1e-7	☐

Optional constraints:

Parameter	Lower Bou	Upper Bou
b1		
b2		
b3		
b4		

Slika 3.26. Polja za unošenje zahtevanih početnih vrednosti

7. OK

Jednačina krive nelinearne regresije

Expansion = (1,07764 - 0,122693 * Kelvin + 0,00408638 * Kelvin ^ 2 - ...

Expansion

Kelvin

Slika 3.27. Kriva nelinearne regresije

Na slici 3.27. prikazana je kriva nelinearne regresije kao jedan od izlaza iz Minitaba. Linija modela (crvena „fitovana“ kriva) prati prikupljene podatke (plave tačke), što obično znači da model dobro opisuje podatke. *p*-vrednost za grešku modela (eng. **Lack-of-fit**) je 0,679, što znači da je greška statistički nesignifikantna i to je pokazatelj da pretpostavljeni model dobro opisuje podatke. Na slici 3.28. dat je izlaz u radnom prozoru Minitaba.

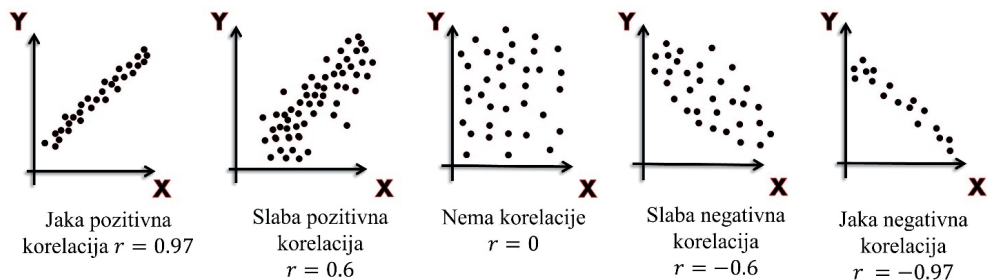
59

Nonlinear Regression: Expansion = (b1 + b2 * Kelvin + b3 * Kelvin ^ 2 + ...					
Method					
Algorithm	Gauss-Newton				
Max iterations	200				
Tolerance	0,0001				
Starting Values for Parameters					
Parameter	Value				
b1	1				
b2	-0,1				
b3	0,005				
b4	-0,000001				
b5	-0,005				
b6	0,001				
b7	-0,0000001				
Equation					
Expansion = (1,07764 - 0,122693 * Kelvin + 0,00408638 * Kelvin ^ 2 - 1,42627e-006 * Kelvin ^3) / (1 - 0,00576099 * Kelvin + 0,000240537 * Kelvin ^ 2 - 1,23144e-007 * Kelvin ^ 3)					
Parameter Estimates					
Parameter	Estimate	SE Estimate			
b1	1,07764	0,170702			
b2	-0,12269	0,012000			
b3	0,00409	0,000225			
b4	-0,0000	0,000000			
b5	-0,00576	0,000247			
b6	0,00024	0,000010			
b7	-0,00000	0,000000			
Expansion = (b1 + b2 * Kelvin + b3 * Kelvin ^ 2 + b4 * Kelvin ^ 3) / (1 + b5 * Kelvin + b6 * Kelvin ^ 2 + b7 * Kelvin ^ 3)					
Lack of Fit					
Source	DF	SS	MS	F	p
Error	229	1,53244	0,0066919		
Lack of Fit	228	1,52583	0,0066922	1,01	0,679
Pure Error	1	0,00661	0,0066125		
Summary					
Iterarions	15				
Final SSE	1,53244				
DFE	229				
MSE	0,0066919				
S	0,0818039				

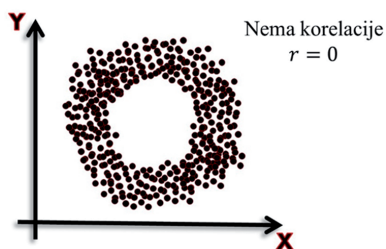
Slika 3.28. Prozor rezultata u Minitabu za nelinearnu regresionu analizu

3.3. Korelacija

Korelacija se koristi da bi se utvrdilo da li dve promenljive imaju linearnu vezu, a koeficijent korelacije (r) se koristi za ocenu jačine veze. Koeficijent korelacije, r , uzima vrednosti od -1 do 1 . Nula implicira da ne postoji linearna korelacija, slika 3.29. Međutim, mogu postojati nelinearni oblici podataka kada je koeficijent korelacije jednak nula, slika 3.30. Iz tog razloga seporučuje da se podaci prvo predstave grafički pre ispitivanja korelacije.



Slika 3.29. Primeri korelacije između dve promenljive



Slika 3.30. Nelinearni oblik podataka sa $r=0$

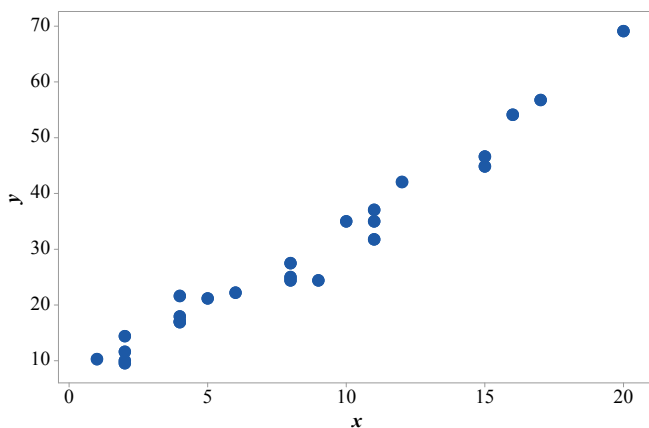
3.3.1. Primer korelacije u Minitabu

Na podacima prikazanim u tabeli 3.7. ispitaće se da li postoji korelacija između promenljivih (x) i (y).

Tabela 3.7. Podaci za ispitivanje korelacije

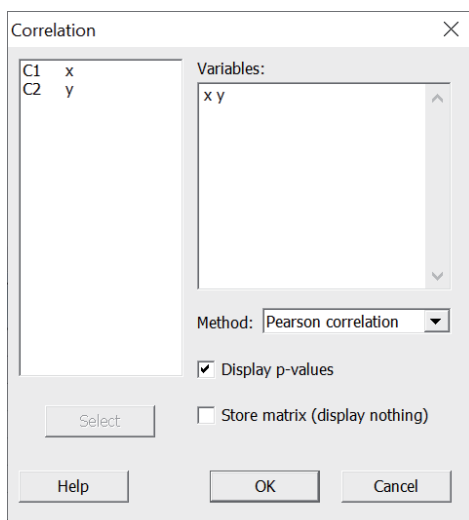
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2	9,60	2	9,95	1	10,30	2	11,66	2	14,38
4	16,86	4	17,08	4	17,89	5	21,15	4	21,65
6	22,13	9	24,35	8	24,45	8	25,02	8	27,50
11	31,75	10	34,93	11	35,00	11	37,00	12	41,95
15	44,88	15	46,59	16	54,12	17	56,63	20	69,00

Prvo se mora videti grafički prikaz između promenljivih u slučaju da postoji nelinearni odnos. Koristi se grafički prikaz podataka **Scatter plot**. Dijagram je prikazan na slici 3.31.



Slika 3.31. Scatter plot dijagram koji pokazuje da postoji korelacija

Sa slike 3.31. je očigledno da postoji korelacija između promenljivih, ali ne mora da znači da je statistički značajna. Za proveru jačine korelacije i njene statističke značajnosti koristi se opcija: **Stat > Basic statistic > Correlation**, zatim se otvori prozor prikazan na slici 3.32. i unesu se promenljive čija se korelacija želi ispitati.

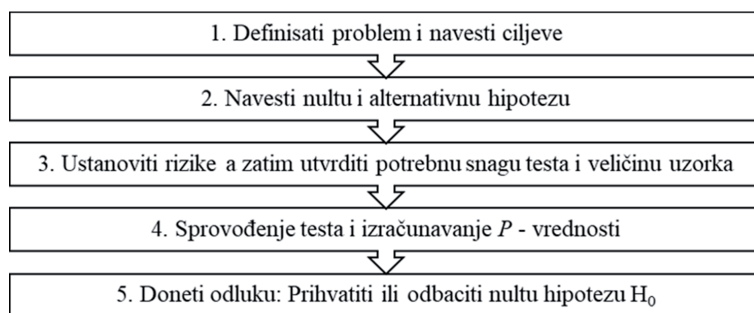


Slika 3.32. Korelacija u Minitabu

Pirsonov koeficijent (r) ukazuje na jaku pozitivnu vezu, $r = 0,982$. Na osnovu postavljenih hipoteza H_0 : " $r=0$ " i H_1 : " $r \neq 0$ ", p -vrednost ukazuje da je korelacija statistički značajna ($p=0,000$).

4. TESTIRANJE STATISTIČKIH HIPOTEZA

Mnogi problemi u inženjerstvu zahtevaju da se donese odluka da li će se prihvatiti ili odbiti izjava o nekom parametru. Ta izjava se naziva **hipoteza**, a postupak odlučivanja o hipotezi se naziva **testiranje hipoteza**. Ovo je jedan od najkorisnijih aspekata statističkog zaključivanja pošto mnoge vrste problema donošenja odluka, testiranja, ili eksperimenata u inženjerskom svetu se mogu formulisati kao problemi testiranja hipoteza. Postoji veoma bliska veza između testiranja hipoteza i intervala poverenja. Testiranje statističkih hipoteza i procena intervala poverenja parametara, su fundamentalne metode koje se koriste u fazi analize podataka uporednog eksperimenta, kao npr. poređenje srednje vrednosti populacije sa specifičnom vrednošću. Ovi jednostavni uporedni eksperimenti se često susreću u praksi i pružaju dobru osnovu za složenije probleme eksperimentalnog dizajna kao što su ANOVA i/ili DoE. U poglavlju 3. je bilo reči o testiranju statističkih hipoteza koje su se odnosile na regresionu analizu i korelaciju. U suštini, statističke hipoteze su izjave o parametrima jedne ili više populacija. Dijagram toka testiranja statističkih hipoteza prikazan je na slici 4.1.



Slika 4.1. *Dijagram toka testiranja statističkih hipoteza*

Testiranje hipoteza je rešavanje problema (nedoumice) koji može da ima samo dva moguća ishoda. Na primer, testiranje hipoteza se može primeniti u sledećim slučajevima: da li je srednja vrednost grupe 1 jednaka srednjoj vrednosti grupe 2 ili je drugačija? Da li je varijansa grupe 1 ista kao varijansa grupe 2 ili je drugačija? Da li je srednja vrednost populacije jednaka nekoj ciljanoj vrednosti ili je drugačija? Za rešavanje navedenih problema koriste se dvostrani testovi. Pored dvostranih testova postoje i jednostrani testovi, čija je prednost u tome što imaju veću snagu od ekvivalentnog dvostranog testa. Primer jednostranog testa je: da li je srednja vrednost grupe 1 manja, jednaka ili veća od srednje vrednosti grupe 2?

Pošto postoje dva rešenja za rešavanje problema postavljaju se dve hipoteze: nulta i alternativna. Nulta hipoteza (H_0) kaže da razlike između uzoraka ne postoje ili da su parametri koji

opisuju te uzorke, kao što su srednja vrednost i standardna devijacija, neznatno različiti. Alternativna hipoteza (H_1) kaže da među uzorcima postoji razlika, odnosno da se parametri uzoraka koji se ispituju značajno razlikuju. Na primer, ako posmatramo već navedeni problem: da li je srednja vrednost grupe 1 ista ili drugačija od srednje vrednosti grupe 2? Nulta hipoteza bi bila da je srednja vrednost za grupu 1 i grupu 2 jednaka, jednačina 4.1.

$$H_0 : \mu_{\text{grupa1}} = \mu_{\text{grupa2}} \quad (4.1.)$$

Alternativna hipoteza bi bila da srednja vrednost grupe 1 i grupe 2 nisu jednake, jednačina 4.2.

$$H_0 : \mu_{\text{grupa1}} \neq \mu_{\text{grupa2}} \quad (4.2.)$$

Hipoteze za jednostrani test (npr: da li je srednja vrednost grupe 1 ista ili drugačija kao srednja vrednost grupe 2) su sledeće, jednačine 4.3. i 4.4:

$$H_0 : \mu_{\text{grupa1}} \leq \mu_{\text{grupa2}} \quad (4.3.)$$

$$H_1 : \mu_{\text{grupa1}} > \mu_{\text{grupa2}} \quad (4.4.)$$

Pri usvajanju ili odbacivanju neke od hipoteze mora se utvrditi rizik, tj. da li postoji verovatnoća da se usvoji jedna od hipoteza, a da je odluka pogrešno donešena. Rizik se definiše preko praga značajnosti α , gde $1-\alpha$ predstavlja poverenje (pouzdanost). U većini slučajeva, za skoro sve statističke testove, vrednost α je uglavnom 0,05 što implicira 95 % za vrednost poverenja. Ako se donese pogreška odluka da se odbaci H_0 , a da to nije slučaj (analizom se dobiju veće vrednosti od rizika α) to se naziva greška I tipa ili se ponekad naziva „rizik proizvođača“. Drugim rečima rečeno, α je rizik da se pronađe razlika, a da ona ne postoji. β rizik se odnosi na slučaj u kojem zaista postoji razlika, tj. potrebno je odbiti H_0 . Rizik β je rizik neodbacivanja loše hipoteze, tj. da razlika stvarno postoji, a da testiranje to nije pokazalo. Ovo se naziva još i greška tipa II ili „rizik potrošača“. Termin „snaga“ je dat sa $1-\beta$. Obično se za snagu uzima vrednost od oko 80-90 % za test procedure. Snaga testa je verovatnoća pravilnog zaključivanja da postoji razlika kada stvarno postoji.

Značajnost ili α rizik se postavljaju u procedurama testiranja. Promena vrednosti α će promeniti intervale poverenja statističkog testa. β rizik ili snaga se izračunava pre testiranja kao deo procedure za snagu i veličinu uzorka. Test procedura za izračunavanje snage i veličine uzorka zahteva postojanje standardne devijacije. Takođe, dve od tri vrednosti, veličina uzorka, razlike i snaga, se moraju definisati da bi se odredila treća vrednost. Na sledećem primeru će biti prikazana test procedura za ispitivanje snage i veličine uzorka za t test jednog uzorka.

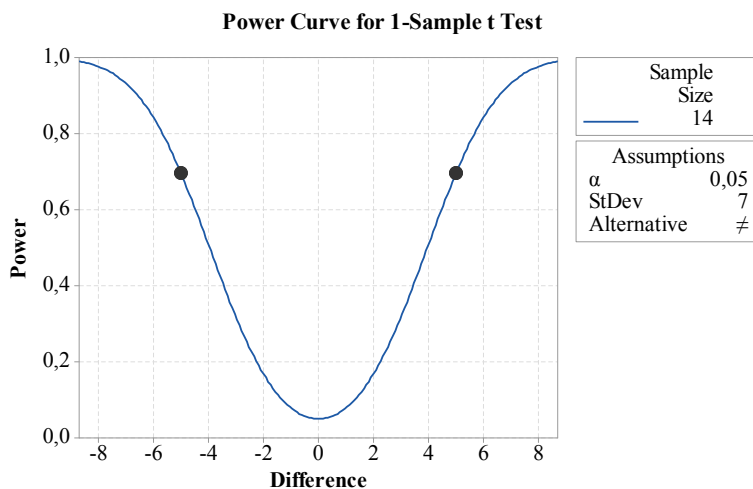
Primer u Minitabu. Potrebno je odrediti prosečno vreme tehnološkog postupka izrade kućišta motora sa svim glavnim i pomoćnim operacijama. Koristiće se t test sa jednim uzorkom i na početku

je potrebno odrediti snagu testa. Sa pretpostavljenom značajnosti od 5 % želi se dobiti snaga od 80 % i da se otkrije razlika od ± 5 min. Postoje resursi za sprovođenje 14 nezavisnih testova i poznata je empirijska standardna devijacija od 7 min. Procedura u Minitabu je sledeća.

1. **Stat > Power and Sample Size > 1 Sample t**
2. Popuniti prema slici 4.2.
3. **OK**

Slika 4.2. Opcija *Power and Sample size*

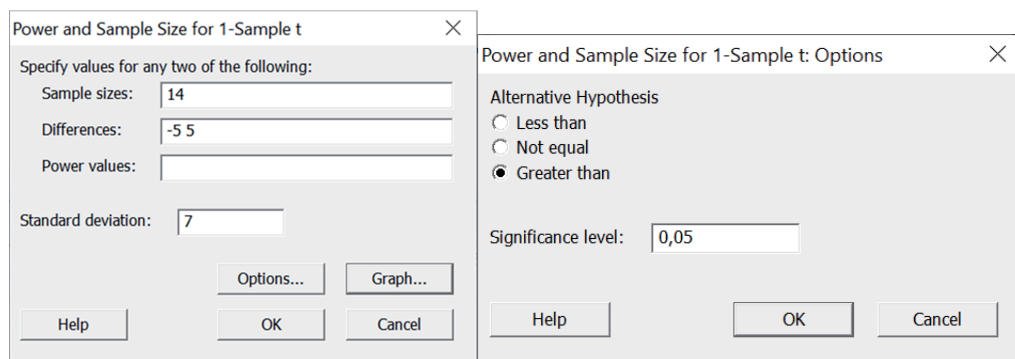
Kao izlaz iz Minitaba dobija se dijagram prikazan na slici 4.3. Na slici vrednost snage je definisana sa dve tačke koje imaju istu vrednost. Tačna vrednost snage se može očitati u prozoru rezultata (snaga u ovom slučaju je 69,56 %, što je manje od traženih 80 %.)



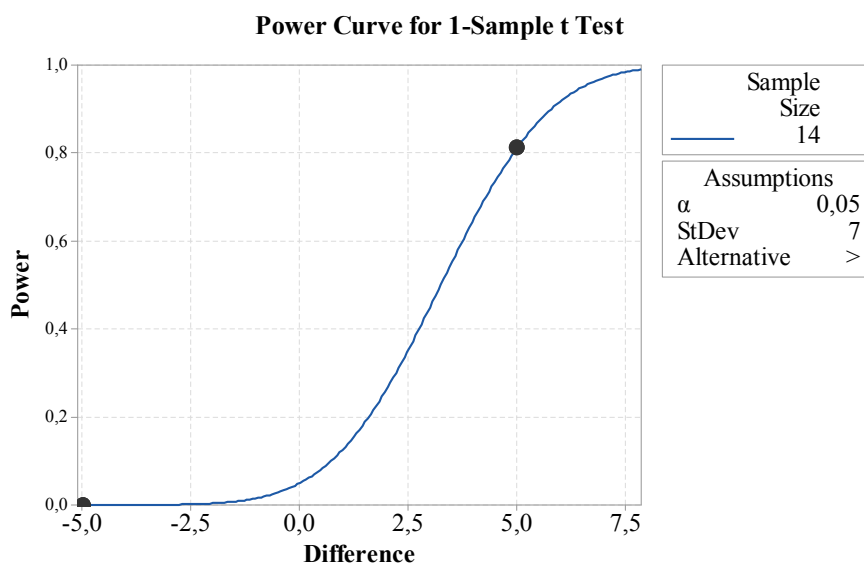
Slika 4.3. Određivanje vrednosti snage testa

U ovom primeru je rađen dvostrani test (razlika je bila ± 5 min) i 14 testova nije dovoljno da bi se ostvarila snaga od ciljanih 80 %. Iz tog razloga tehnolozi definišu novu razliku od 5 min i tada će se sprovesti jednostrani test, slika 4.4. Rezultujući dijagram je prikazan na slici 4.5. Vrednost snage testa u ovom slučaju je 81,19 % što zadovoljava postavljeni kriterijum.

1. **Stat > Power and Sample Size > 1 Sample t**
2. Popuniti prema slici 4.2, zatim **Options** i odabrati **Greater than**
3. **OK**.



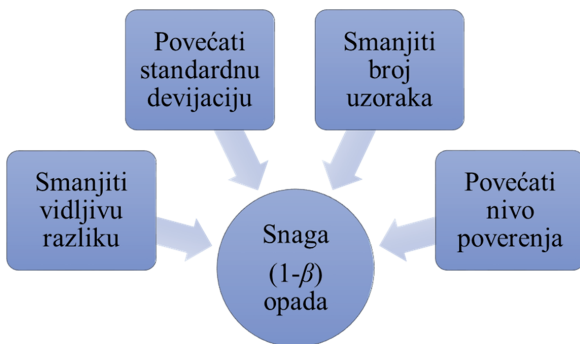
Slika 4.4. Sprovođenje jednostranog testa za ocenu snage



Slika 4.5. Rezultat jednostranog testa za ocenu snage

Na osnovu rezultata se može izvući zaključak da tehnološki postupak izrade kućišta motora može postići snagu od preko 80 %, koristeći 14 testova sa jednostranim testom. Ovo znači da ako postoji razlika tada su šanse 80 % da se ona otkrije. Nivo pouzdanosti nije menjan i ostaje na podrazumevanom nivou od 95 %. Ovo znači da ako je nulta hipoteza ispravna, tj. da nema razlike, šanse su 95 % da se to otkrije.

Snaga testa je podjednako važna koliko i značajnost i treba je pomenuti kao deo rezultata. Na slici 4.6. su pokazani parametri koji utiču na snagu testa.



Slika 4.6. Uticajni parametri na snagu testiranja

4.1. Sprovođenje i vrste statističkih testova

Nakon što se sprovedu prve tri procedure sa dijagrama toka prikazanog na slici 4.1, može se pristupiti sprovođenju statističkih testova i na osnovu njih doneti odluka o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze. Sledeći testovi se mogu sprovesti u Minitabu:

- **One Sample t test** (*t* test jednog uzorka)- za poređenje srednje vrednosti populacije sa ciljanom vrednošću
- **Paired t test** (upareni *t* test) - za poređenje srednjih vrednosti dve zavisne populacije
- **Two Variance test** (test poređenja dve varijanse) - za poređenje nivoa varijacije dve nezavisne populacije
- **Two Sample t test** (*t* test poređenja dva uzorka) - za poređenje srednjih vrednosti dve nezavisne populacije

Pre nego što se sprovede neki od nabrojanih testova, poželjno je pregledati podatke kroz dijagram **Graphical Summary**. Dobro je dobiti osećaj za numeričke vrednosti, oblik raspodele i uticaj koji će oni imati na tačnost testa koji će se sprovesti. Odluka o prihvatanju ili odbacivanju hulte hipoteze će biti zasnovana na poređenju *p* vrednosti i α , tj. ako je $p > \alpha$ prihvata se H_0 i ako je $p < \alpha$ odbacuje se H_0 .

4.1.1. *t* test jednog uzorka

Ovaj test se koristi u slučaju kada se želi ispitati da li postoji statistički značajna razlika između uzorka i ciljane vrednosti. Prednosti i ograničenja ovog testa su sledeće:

- Podaci uzorka moraju biti nasumično odabrani iz populacije
- Podaci moraju biti neprekidni i pripadati jednoj raspodeli
- Podaci uzorka su najverovatnije iz populacije koja ima normalnu raspodelu
- Ovaj test je veoma robustan na podatke koji ne podležu normalnoj raspodeli sve dok je veličina uzorka veća od 20

Primer u Minitabu: Tehnolog iz predhodnog primera želi da utvrdi da li je prosečno vreme za tehnološki postupak izrade kućišta motora više od 200 min. Na bazi rezultata procedura za snagu i veličinu uzorka utvrđena je snaga uzorka veća od 80 % za *t* test jednog uzorka. Ovo je sa jednostranim testom sa veličinom uzorka 14, najmanjom razlikom koju test može da prepozna 5 min i standardnom devijacijom 7 min. Proizvođač sprovodi 14 nezavisnih testova i rezultati su prikazani u tabeli 4.1. Potrebno je utvrditi da li će prosečno vreme izrade kućišta motora biti duže od 200 minuta na osnovu rezultata 14 uzoraka. Postavljaju se hipoteze:

H_0 : srednja vrednost populacije ≤ 200 min

H_1 : srednja vrednost populacije > 200 min

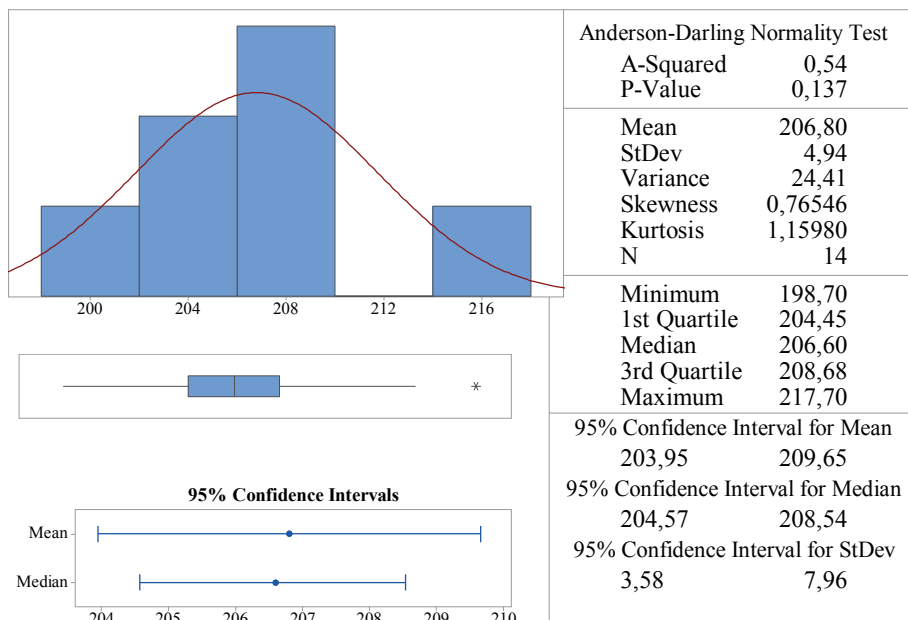
Vrednosti α i β
su ranije
definisane

Tabela 4.1. Vrednosti trajanja tehnološkog procesa izrade kućišta motora

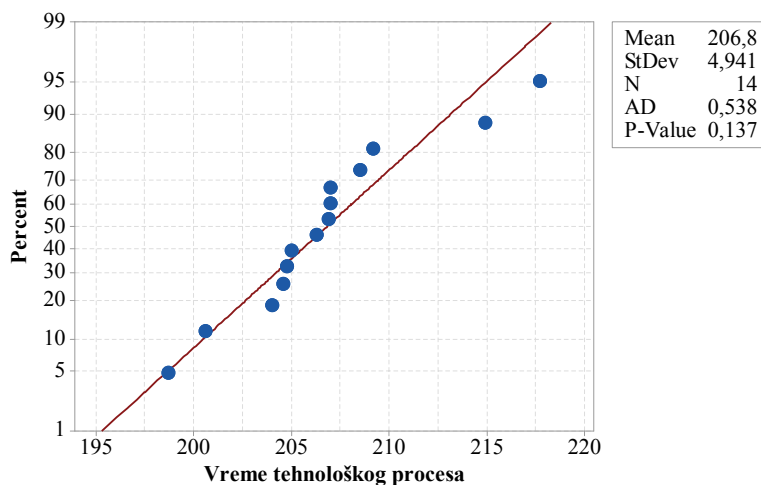
Vreme trajanja tehnološkog procesa u min	
198,7	207,0
204,0	204,8
204,6	214,9
209,2	200,6
207,0	208,5
206,9	217,7
206,3	205,0

Pre nego što se izvrši testiranje hipoteze, potrebno je ispitati da li su ispunjeni uslovi koji se zahtevaju od podataka u uzorku, koristeći opciju **Graphical Summary**, slika 4.6. Sa dijagrama se može uočiti da je srednja vrednost uzoraka 206,8 i takođe se može uočiti da je 95 % interval poverenja za srednju vrijednost. *p* vrednost za AD test normalnosti je 0,137, ali treba biti oprezan jer je veličina uzorka mala, te će se sprovesti test normalnosti (Anderson-Darling test). Slika 4.7. pokazuje da podaci u uzorku imaju normalnu raspodelu.

Sumarni dijagram za vreme tehnološkog procesa



Slika 4.6. Graphical Summary za promenljivu vreme tehnološkog procesa

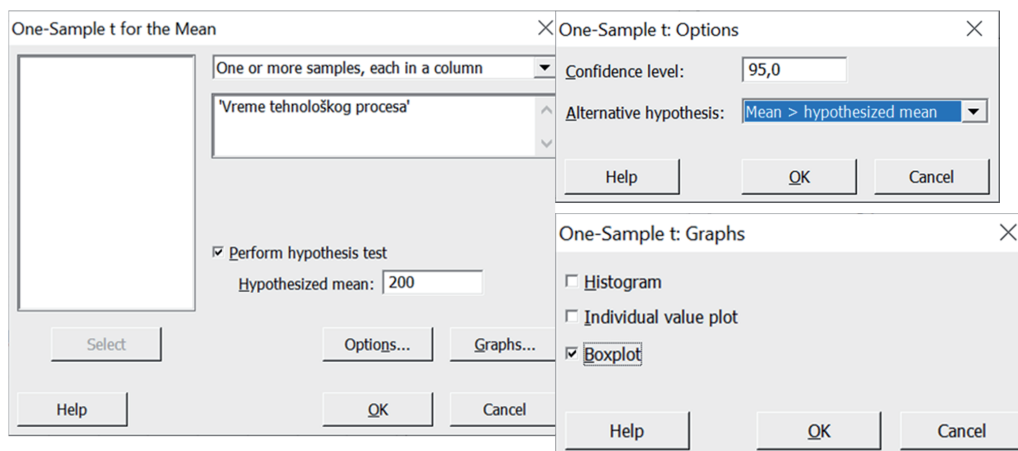


Slika 4.7. Test normalnosti za promenljivu vreme tehnološkog procesa

Sada se može sprovesti t test jednog uzorka prema sledećem, slika 4.7:

1. **Stat > Basic Statistics > 1 Sample t**

2. Izabere se promenljiva vreme
3. Unese se 200 *Hypothesized mean*
4. Klikne se na *Graphs* i izabere se *Boxplot of data*, zatim *OK*
5. Klikne se *Options* i u padajućem meniju se izabere *Mean > hypothesized mean* kao alternativna hipoteza
6. *OK*.



Slika 4.7. Sprovođenje *t* testa jednog uzorka u Minitabu

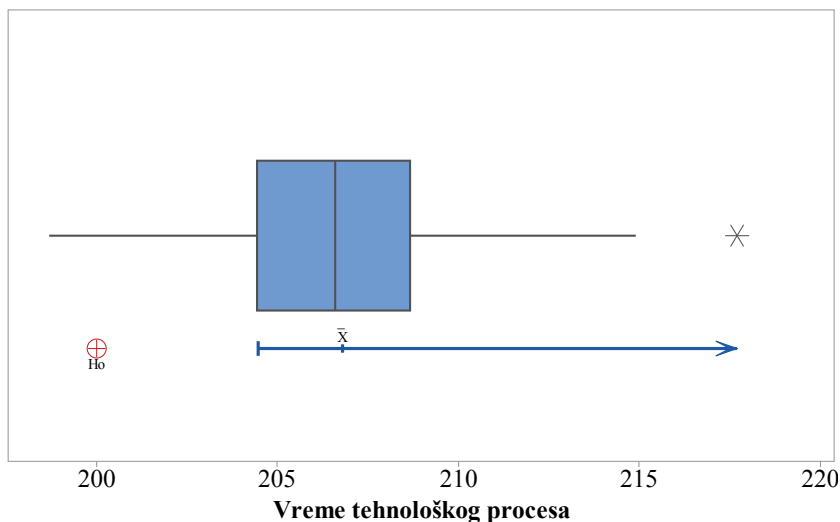
Rezultati *t* testa prikazani su na slici 4.8. Sa slike se vidi da je *p* vrednost 0,000 i prema tome odbacuje se H_0 hipoteza što znači da srednje vreme tehnološkog postupka nije 200 i manje. Takođe, treba imati na umu da je srednja vrednost uzorka 206,8, a donja granica intervala poverenja od 95 % je 204,46.

One-Sample T: Vreme tehnološkog procesa							
Test of $\mu = 200$ vs > 200							
Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95 % Lower Bound	<i>t</i>	<i>p</i>
Vreme tehnološkog procesa	14	206,80	4,94	1,32	204,46	5,15	0,000

Slika 4.8. Rezultati *t* testa jednog uzorka

Isto tumačenje rezultata se može primeniti ako se pogleda box-plot dijagram, slika 4.8. Pošto se zahtevao jednostrani test, koji je testirao da li je srednja vrednost populacije jednaka ili manja od 200 min, na dijagramu je prikazan samo donji interval poverenja, slika 4.9.

(with H_0 and 95% t -confidence interval for the mean)



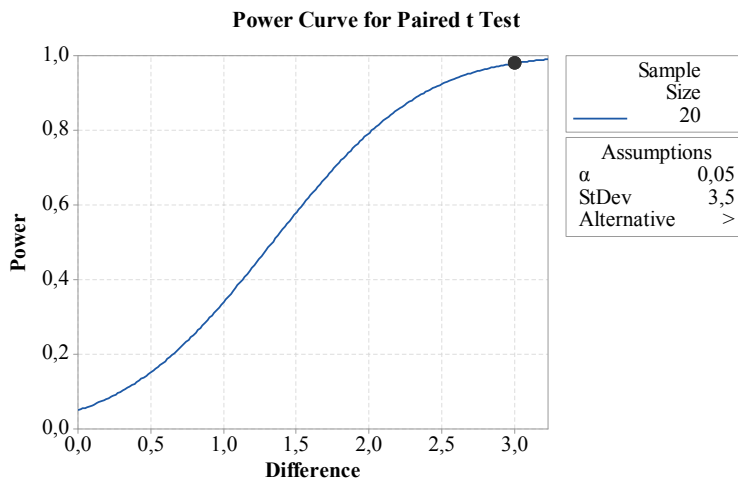
Slika 4.9. Grafički prikaz rezultata t testa jednog uzorka

4.1.2. Upareni t test

Upareni t test se koristi za testiranje razlike između srednjih vrednosti dva skupa zavisnih uzoraka. Skupovi obično uključuju ljudski element koji daje zavisnost između dva skupa podataka. Ovaj test zahteva da razlika skupova podataka treba da formira populaciju koja ima normalnu raspodelu. Takođe, test je poprilično robusan za podatke koji nemaju normalnu raspodelu kada je veličina uzorka veća od 20.

Primer u Minitabu: Proizvođač reznih alata želi da odredi da li dve različite vrednosti grudnog ugla kod strugarskog noža prave razliku u hrapavosti obrađene površine materijala. Pod istim režimima obrade, izabrano je 20 osovina i merena je srednja vrednost hrapavosti R_a . Vrednosti hrapavosti izražene u mikrometrima su prikazane u tabeli 4.2. Takođe, potrebno je odrediti i snagu testa ako je empirijska standardna devijacija $3,5 \mu\text{m}$ i želi se otkriti razlika od $3 \mu\text{m}$.

Prvo će se odrediti snaga uparenog t testa **Stat > Power and Sample Size > Paired t** (procedura je identična onoj za t test jednog uzorka). Nakon unošenja vrednosti u odgovarajuća polja dobija se da je snaga testa 93,43 %, slika 4.10.



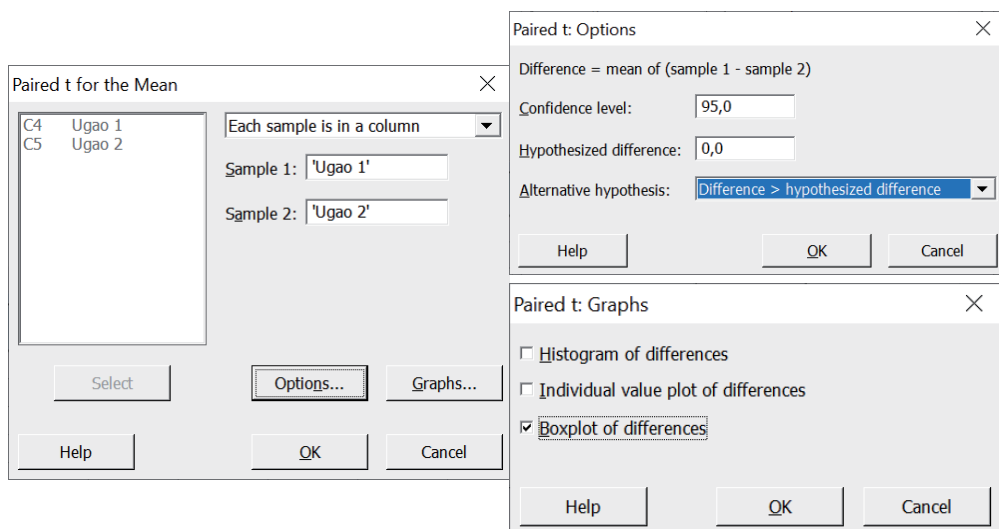
Slika 4.10. Određivanje snage uparenog t testa

Tabela 4.2. Vrednosti srednje aritmetičke hrapavosti

Ugao 1	Ugao 2	Razlika	Ugao 1	Ugao 2	Razlika
68	67	1	76	73	3
76	77	-1	77	68	9
74	74	0	78	71	7
71	74	-3	75	72	3
71	69	2	75	77	-2
72	70	2	84	80	4
75	71	4	77	74	3
83	77	6	69	73	-4
75	71	4	75	72	3
74	74	0	65	62	3

Procedura sprovođenja uparenog t testa je sledeća (slika 4.11):

1. **Stat > Basic Statistics > Paired t**
2. Izabere se promenljiva Ugao 1 za **Sample 1** i Ugao 2 za **Sample 2**
3. Klikne se na **Graphs** i izabere se **Boxplot of differences**, zatim **OK**.
4. Klikne se **Options** i u padajućem meniju se izabere **Difference > hypothesized mean** kao alternativna hipoteza
5. **OK**

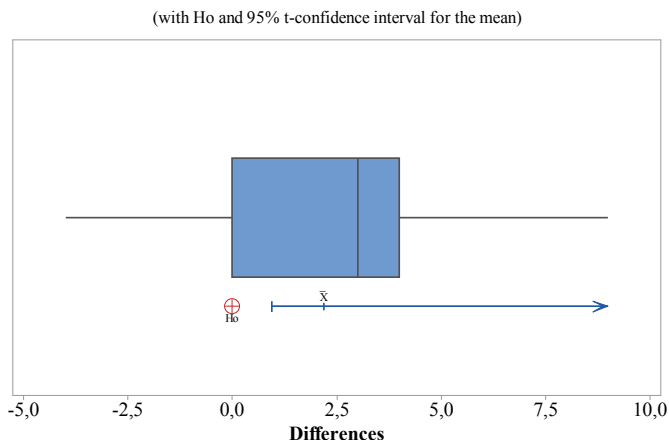


Slika 4.11. Sprovođenje uparenog t testa u Minitabu

Rezultati uparenog t testa prikazani su na slici 4.12. Sa slike se vidi da je p vrednost 0,003 i prema tome odbacuje se H_0 hipoteza, što znači da postoje statistički značajne razlike između srednjih vrednosti dve ispitivane grupe. Iz prozora rezultata se može videti da je razlika srednjih vrednosti 2,2 što ukazuje da se sa uglom 1 ostvaruju veći rezultati (lošiji rezultati hrapavosti). Odbacivanje H_0 se takođe može videti na box-plot dijagramu, slika 4.13.

Paired T-Test and CI: Ugao 1; Ugao 2				
Paired T for Ugao 1 - Ugao 2				
	N	Mean	StDev	SE Mean
Ugao 1	20	74,50	4,51	1,01
Ugao 2	20	72,30	4,05	0,91
Difference	20	2,200	3,254	0,728
95 % lower bound for mean difference: 0,942				
T-Test of mean difference = 0 (vs > 0): T-Value = 3,02 P-Value = 0,003				

Slika 4.12. Rezultati uparenog t testa



Slika 4.13. Grafički prikaz rezultata t testa jednog uzorka

4.1.3. Test poređenja dve varijanse

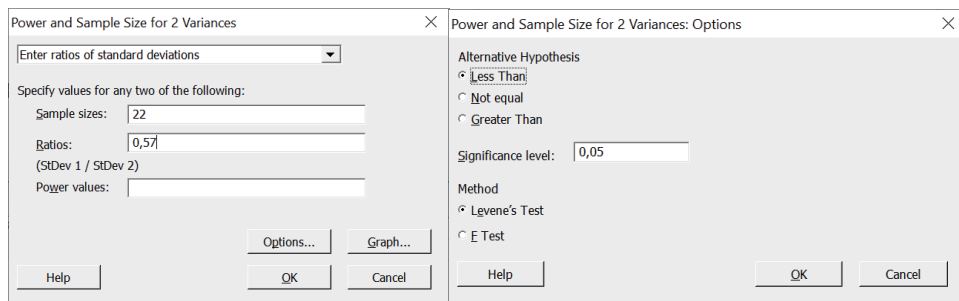
Test poređenja dve varijanse se koristi da bi se utvrdilo da li su varijanse ili standardne devijacije dve populacije (statistički) različite. Testiranje u Minitabu se može izvršiti na dva načina. Koristi se F test, za podatke koji potiču od normalno raspoređene populacije, a Levene-ov (*Levene/Brown–Forsythe*) test je za sve ostale raspodele neprekidne slučajne promenljive. Veličine uzoraka za sprovođenje ovog testa mogu biti nejednake. Ovaj test je veoma pogodan za unapređenje kvaliteta nekog procesa. Test se može koristiti za poređenje varijanse procesa pre i posle implementiranih unapređenja. Mogu se postaviti sledeće hipoteze:

Nulta hipoteza $H_0: \sigma_1/\sigma_2 = k$	Odnos između prve i druge standardne devijacije (ili prve i druge varijanse) je jednak pretpostavljenoj vrednosti k
Alternativna hipoteza $H_1: \sigma_1/\sigma_2 \neq k$	Odnos između prve i druge standardne devijacije (ili prve i druge varijanse) nije jednak pretpostavljenoj vrednosti k
Alternativna hipoteza $H_1: \sigma_1/\sigma_2 > k$	Odnos između prve i druge standardne devijacije (ili prve i druge varijanse) je veći od pretpostavljene vrednosti k
Alternativna hipoteza $H_1: \sigma_1/\sigma_2 < k$	Odnos između prve i druge standardne devijacije (ili prve i druge varijanse) je manji od pretpostavljene vrednosti k

Primer u Minitabu: Inženjer održavanja remontovao je istrošene delove na sistemu dovoda koji reguliše količinu aditiva u procesu. Kontrolni sistem na dodavaču se trudi da održi istu srednju vrednost ali uvek postoje određene varijacije od dodavača. Inženjer želi da proveri da li su se

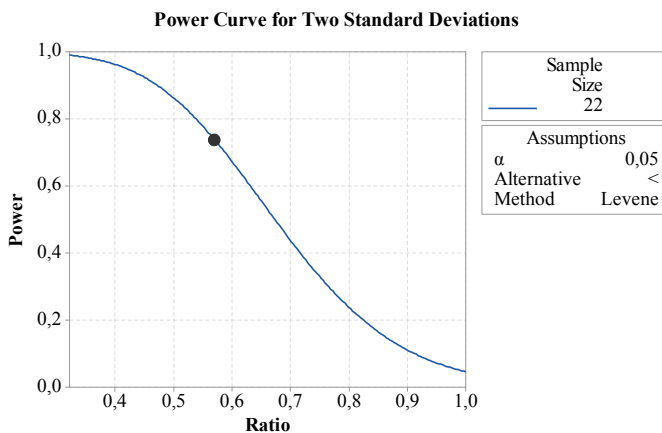
varijacije promenile nakon remonta. Pre testiranja potrebno je odrediti snagu testa. Broj testiranja je 22 pre remonta i nakon remonta. Inženjer smatra da odnos standardne devijacije pre remonta/nakon remonta ne sme da bude manji od 0,57. Snaga testa se određuje na sledeći način:

1. **Stat > Power and Sample Size > 2 Variances.**
2. Popuniti prema slici 4.14. (voditi računa da se u padajućem meniju nalazi standardna devijacija a ne varijansa).
3. Kliknuti **Options** i odabrati **Less Than** kao alternativnu hipotezu i **Levene's Test** za metodu
4. **OK**

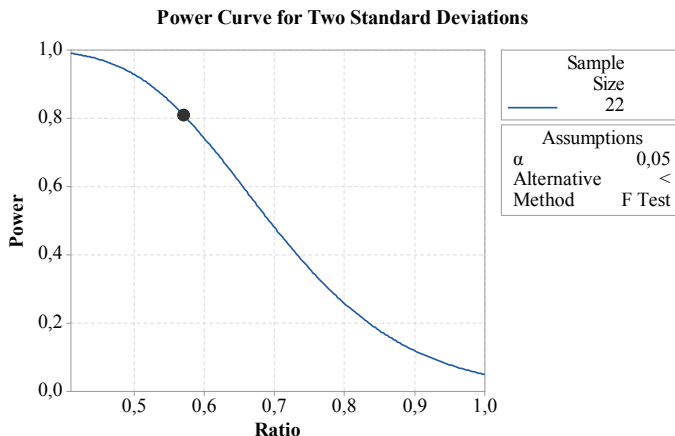


Slika 4.14. Sprovođenje testa za poređenje dve standardne devijacije

Rezultat snage testa je 73,8 %, slika 4.15. Ista procedura će se ponoviti, ali će se za metodu testiranja izabrati **F test** umesto **Levene's Test**. Rezultat snage testa sa ovom metodom je 81 %, slika 4.16. Može se zaključiti da se veća snaga dobija ako se koristi F test međutim to bi značilo da podaci iz populacije već moraju biti dostupni i da imaju normalnu raspodelu.



Slika 4.15. Određivanje snage testa sa metodom **Levene's Test**



Slika 4.16. *Određivanje snage testa sa metodom F Test*

U tabeli 4.3. prikazani su podaci izmerene količine aditiva pre i nakon remonta.

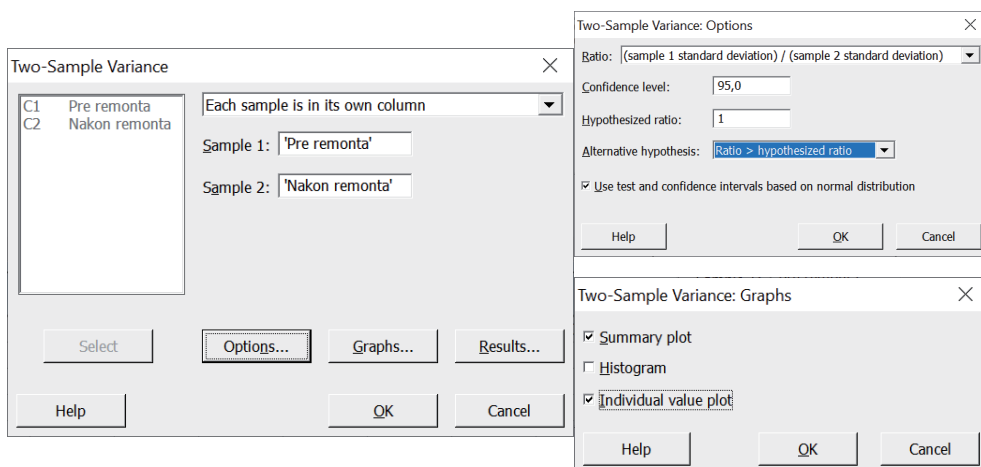
Tabela 4.3. *Vrednosti količine aditiva*

Pre remonta	Nakon remonta	Pre remonta	Nakon remonta
10,70	5,60	4,71	4,18
9,92	9,38	10,80	4,70
8,10	7,85	10,60	3,90
6,63	7,43	11,10	6,90
7,56	6,44	13,40	7,70
14,20	6,20	9,64	11,10
7,71	8,13	13,10	11,30
17,50	8,50	15,60	9,80
9,23	9,75	11,40	11,10
10,10	9,94	8,56	9,53
10,30	9,50	11,80	8,70

Prvo će se analizirati podaci koristeći opciju **Graphical Summary**. Cilj je da se utvrdi da li podaci podležu normalnoj raspodeli i da li se može koristiti **F test**. **Graphical Summary** prikazuje da obe grupe podataka podležu normalnoj raspodeli. Takođe, odnos standardnih devijacija pre i posle remonta je $2,961/2,2112=1,34$. Za sprovođenje testa koraci su sledeći, slika 4.17:

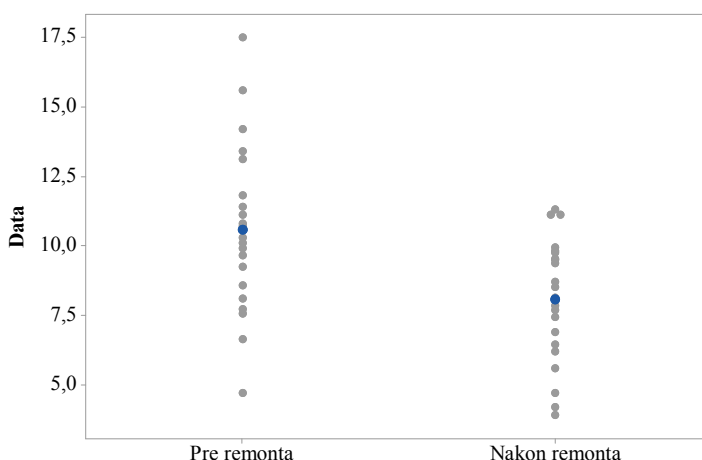
1. **Stat > Basic Statistics > 2 Variances**
2. U padajućem meniju izabere se **Each sample is in its own column** zatim se za **Sample 1** izabere Pre remonta a za **Sample 2** Posle remonta
3. Klikne se na **Graphs** i izabere se **Summary Plot** i **Individual value plot**, zatim **OK**

4. Klikne se **Options** i u padajućem meniju se izabere **(sample 1 standard deviation)/(sample 2 standard deviation)**, za alternativnu hipotezu se izabere **Ratio>hypothesized ratio** i izabere se opcija **Use test and confidence intervals based on normal distribution**
5. **OK**



Slika 4.17. *Sprovođenje testa poređenja dve varijanse*

Kao rezultat će se prvo prodiskutovati izlazni dijagram **Individual value plot**, slika 4.18. Sa slike se može zaključiti da podaci koji pripadaju „nakon remonta“ imaju dosta manje rasipanje od podataka „pre remonta“, međutim ne može se tvrditi da li je razlika statistički signifikantna. Takođe, može se uočiti da je srednja vrednost podataka „nakon remonta“ manja u odnosu na podatke „pre remonta“.



Slika 4.18. *Dijagram individualnih vrednosti za promenljive „pre remonta“ i „posle remonta“*

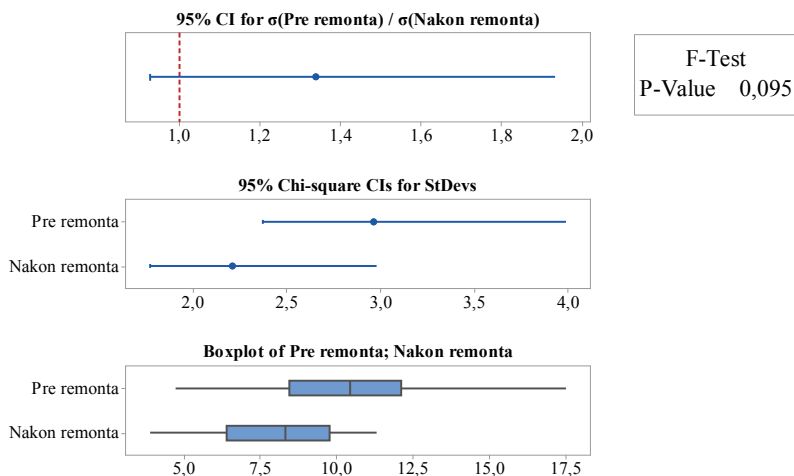
Zatim će se analizirati rezultati dobijeni u prozoru rezultata, slika 4.19. Iako postoji razlika između standardnih devijacija ona nije statistički značajna jer je p vrednost 0,095. Na bazi ove tvrdnje može se zaključiti da naponi koji su uloženi za remont istrošenih delova nisu značajno doprineli da se smanji rasipanje količine aditiva. Ova tvrdnja je grafički prikaza na slici 4.20.

Test and CI for Two Variances: Pre remonta; Nakon remonta				
Method				
Null hypothesis	$\sigma(\text{Pre remonta}) / \sigma(\text{Nakon remonta}) = 1$			
Alternative hypothesis	$\sigma(\text{Pre remonta}) / \sigma(\text{Nakon remonta}) > 1$			
Significance level	$\alpha = 0,05$			
Statistics				
Variable	<i>N</i>	StDev	Variance	95 % Lower Bound for StDev
Pre remonta	22	2,961	8,766	2,374
Nakon remonta	22	2,211	4,890	1,773
Ratio of standard deviations = 1,339				
Ratio of variances = 1,793				
95 % One-Sided Confidence Intervals				
	Lower Bound for StDev		Lower Bound for Variance	
Method	Ratio		Ratio	
F	0,927		0,860	
Tests				
Method	DF1	DF2	Test statistic	p-Value
F	21	21	1,79	0,095

Slika 4.19. Rezultati testa poređenja dve varijanse

Test and CI for Two Variances: Pre remonta; Nakon remonta

Ratio = 1 vs Ratio > 1



Slika 4.20. Grafički prikaz rezultata testa poređenja dve varijanse

4.1.4. *t* test poređenja dva uzorka

t test poređenja dva uzorka se koristi da se utvrdi da li su srednje vrednosti dve populacije različite, tj. da se utvrdi da li su razlike statistički značajne, ili kada se želi odrediti raspon vrednosti unutar kojih se najverovatnije nalazi razlika između srednjih vrednosti dve populacije. Podaci jedne populacije su nezavisni od podataka druge populacije. Ovaj test ima dobre rezultate i kod podataka koji nemaju normalnu raspodelu za slučaj kada su podaci neprekidnog tipa, razumno simetrični i unimodalni. Međutim, od dve grupe podataka se zahteva da imaju jednake varijanse. Postavljaju se sledeće hipoteze:

Nulta hipoteza $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$	Razlika između srednjih vrednosti populacija $(\mu_1 - \mu_2)$ je jednaka pretpostavljenoj vrednosti δ_0
Alternativna hipoteza $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$	Razlika između srednjih vrednosti populacija $(\mu_1 - \mu_2)$ nije jednaka pretpostavljenoj vrednosti δ_0
Alternativna hipoteza $H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$	Razlika između srednjih vrednosti populacija $(\mu_1 - \mu_2)$ je veća od pretpostavljene vrednosti δ_0
Alternativna hipoteza $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta_0$	Razlika između srednjih vrednosti populacija $(\mu_1 - \mu_2)$ je manja od pretpostavljene vrednosti δ_0

Primer u Minitabu: Tim lider želi da uporedi dve proizvodne jedinice (Istočna Evropa i Bliski Istok) na osnovu zadovoljstva zaposlenih kako sa uslovima rada tako i sa standardom života. Zadovoljstvo je ocenjeno od 0-100 i prikazano je u tabeli 4.4. Takođe, potrebno je odrediti

maksimalnu razliku testa ako je snaga 90 %. Broj uzoraka koji se testira je 20, a empirijska standardna devijacija je 11.

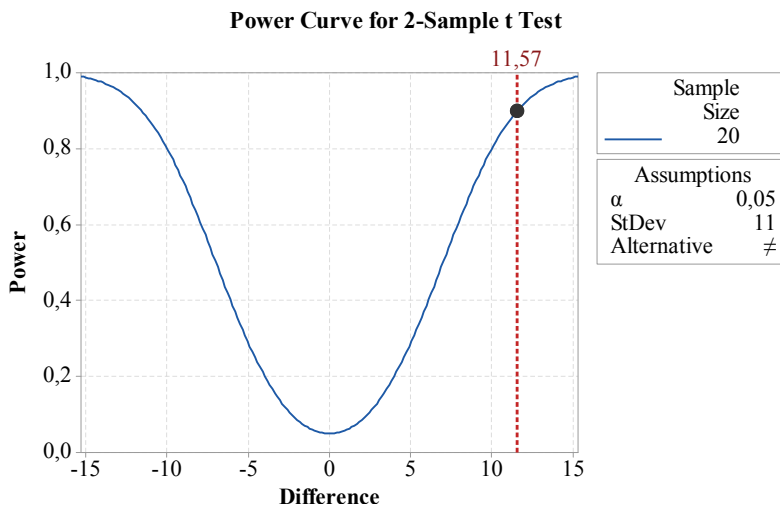
Tabela 4.4. Ocene zadovoljstva zaposlenih

Istočna Evropa	Bliski Istok	Istočna Evropa	Bliski Istok
81	89	81	59
77	64	85	58
75	35	77	65
74	68	78	71
86	69	83	67
90	55	90	58
62	37	78	63
73	57	76	68
91	42	71	55
98	49	80	57

Kao i u svim testovima do sad, prvo se sprovodi test za snagu i veličinu uzorka:

1. **Stat > Power and Sample Size > 2-Sample t**
2. Popuniti prema slici 4.21.
3. **OK** i dobija se dijagram koji određuje maksimalnu razliku, slika 4.22.

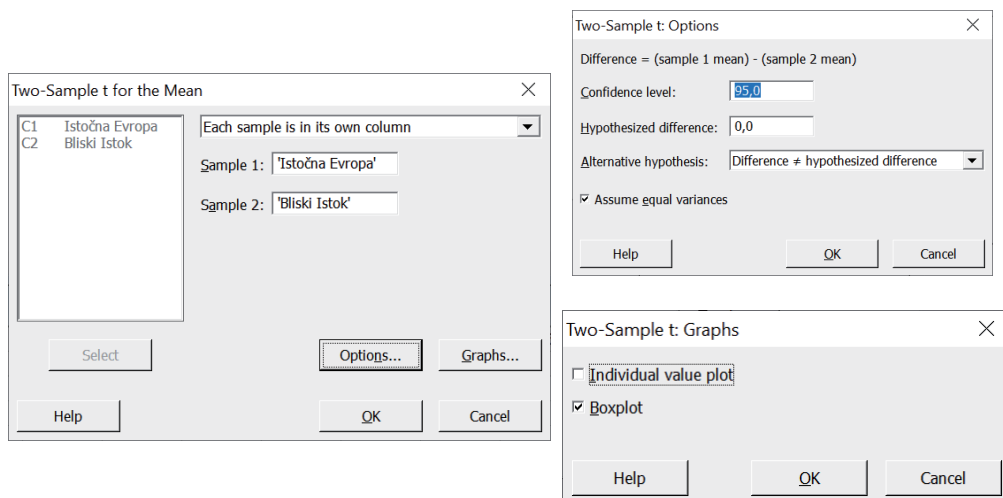
Slika 4.21. Procedura sprovođenja testa za dobijanje maksimalne razlike



Slika 4.22. *Određivanje maksimalne razlike*

Sa slike 4.22. a i direktno sa prozora rezultata je otkriveno, za ove uslove, da može da se otkrije razlika od 11,57. Nakon toga potrebno je proveriti osnovne pretpostavke koristeći **Graphical summary** (dijagrami nisu prikazani). Može se zaključiti da su podaci simetrični i unimodalni, takođe p vrednosti ukazuju da podaci podležu normalnoj raspodeli. Na osnovu vrednosti standardnih devijacija može se zaključiti da je zadovoljen uslov jednakosti varijanse (postoje testovi za jednakost varijanse i o tome će biti više reči u poglavlju ANOVA). Nakon zadovoljavanja ovih pretpostavki može se sprovesti test prema sledećem, slika 4.23:

1. **Stat > Basic Statistics > 2-Sample t**
2. U padajućem meniju izabere se **Each sample is in its own column** zatim se za **Sample 1** izabere Istočna Evropa a za **Sample 2** Bliski Istok
3. Klikne se na **Graphs** i izabere se **Boxplot**, zatim **OK**
4. Klikne se **Options** i za alternativnu hipotezu se izabere **Difference $\neq$ hypothesized difference** i izabere se opcija **Assume equal variances**
5. **OK.**

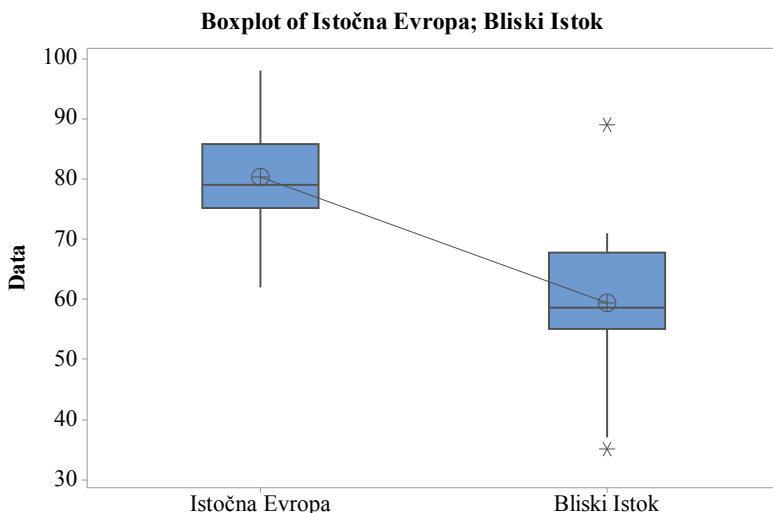


Slika 4.23. Sprovođenje *t* testa poređenja dva uzorka

Rezultati testiranja su prikazani na slici 4.24. Sa slike se može uočiti da je $p=0,000$ što ukazuje da postoje statistički značajne razlike između srednjih vrednost ispitivanih grupa, tj. zadovoljstvo radnika nije isto u dve razmatrane regije. Takođe, može se zaključiti da je veće zadovoljstvo radnika u Istočnoj Evropi (veća srednja vrednost) i da je razlika srednjih vrednosti 21. Razlike u srednjim vrednostima se mogu videti i na boxplot dijagramima, slika 4.25.

Two-Sample <i>T</i> -Test and CI: Istočna Evropa; Bliski Istok				
Two-sample <i>T</i> for Istočna Evropa vs Bliski Istok				
	<i>N</i>	Mean	StDev	SE Mean
Istočna Evropa	20	80,30	8,18	1,8
Bliski Istok	20	59,3	12,4	2,8
Difference = μ (Istočna Evropa) - μ (Bliski Istok)				
Estimate for difference: 21,00				
95 % CI for difference: (14,26; 27,74)				
<i>T</i> -Test of difference = 0 (vs $\neq$): <i>T</i> -Value = 6,31 <i>P</i> -Value = 0,000 DF = 38				
Both use Pooled StDev = 10,5237				

Slika 4.24. Rezultati *t* testa poređenja dva uzorka



Slika 4.25. Grafički prikaz rezultata *t* testa poređenja dva uzorka

4.2. Neparametarski statistički testovi

Neparametarski statistički testovi (neparametarska statistika) su testiranja hipoteza koje ne zahtevaju da raspodela populacije bude okarakterisana sa određenim parametrima. Na primer, mnogi testovi koji se bave testiranjem hipoteza, oslanjaju se na pretpostavku da podaci populacija (uzoraka) pripadaju normalnoj raspodeli sa parametrima μ i σ . Neparametarski testovi nemaju ovakvu pretpostavku, pa su zato veoma korisni kada podaci strogo ne odgovaraju normalnoj raspodeli i kada odolevaju transformacijama.

U parametarskoj statistici, pretpostavka je da su uzorci uzeti iz potpuno definisane raspodele koja je okarakterisana sa jednim ili više nepoznatih parametara koje se žele otkriti. U neparametarskoj statistici, pretpostavka je da podaci dolaze iz nedefinisane raspodele, a često postoji potreba da se sazna podatak o centru te raspodele. Na primer, mnogi testovi u parametarskoj statistici kao što je „**1 Sample t test**“ se sprovedu pod pretpostavkom da podaci dolaze od normalne raspodele sa nepoznatom srednjom vrednošću. U neparametarskoj statistici pretpostavka o normalnosti podataka ne postoji.

Neparametarske metode su veoma korisne kada je narušena pretpostavka o normalnosti podataka i kada uzorak sadrži malo podataka. Međutim, neparametarski testovi nisu kompletno oslobođeni pretpostavki o ispitivanim podacima. Na primer, od ključnog je značaja da su podaci u uzorcima nezavisni i da dolaze iz iste raspodele. Takođe, u **2 Sample** testovima neophodno je pretpostaviti da su raspodele istog oblika i rasipanja.

Tipičan primer neparametarske statistike je oblik raspodele za prosečnu platu koja je приметно nagnuta na desnu stranu zbog toga što većina ljudi zarađuje prosečnu i ispod prosečne plate dok mali broj ljudi radi za veoma visoku. Neparametarske statističke testove je moguće koristiti nad podacima kako bi se na primer odgovorilo na sledeća pitanja:

- Da li je plata, koja predstavlja medijanu, u određenoj kompaniji jednaka nekoj određenoj vrednosti? Upotrebiti „**1-Sample sign test**“
- Da li je plata, koja predstavlja medijanu, u banci koja se nalazu u urbanom području veća nego plata iste banke u ruralnom području? Upotrebiti „**Mann-Whitney test**“ ili „**Kruskal-Wallis test**“
- Da li postoji statistički značajna razlika između plata u ruralnoj, prigradskoj i gradskoj filijali banke? Upotrebiti „**Mood's median test**“
- Kako nivo obrazovanja utiče na visinu plate u ruralnim i urbanim filijalama? Upotrebiti „**Friedman test**“

Tabela 4.5. daje pregled neparametarskih i alternativnih parametarskih testova.

Tabela 4.5. *Neparametarski i alternativni parametarski statistički testovi*

Neparametarski testovi	Parametarski testovi
1-sample sign test	<i>t</i> test jednog uzorka
1-sample Wilcoxon test	<i>t</i> test jednog uzorka
Mann-Whitney test	<i>t</i> test poređenja dva uzorka
Kruskal-Wallis test	Jednofaktorna ANOVA
Mood's Median test	Jednofaktorna ANOVA
Friedman test	Dvofaktorna ANOVA

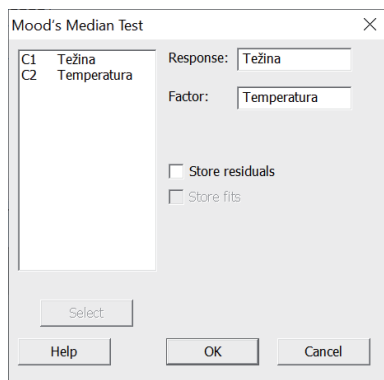
Primer u Minitabu: Naučnik zaštite životne sredine želi da odredi da li promena u temperaturi okeana blizu nuklearne elektrane utiče na rast ribe. Naučnik nasumično deli 25 nedavno izleglih riba u četiri grupe i stavlja svaku grupu u simulirano različito, odvojeno okruženje. Simulirana životna sredina (okolina) za sve četiri grupe je indentična osim temperature. Šest meseci kasnije, naučnik meri težinu riba, tabela 4.6. Da bi odredio da li se medijana težine riba po grupama značajno razlikuje, naučnik koristi **Mood's Median** test. Nulta hipoteza bi bila da ne postoje statistički značajne razlike između medijana, a alternativna da postoje razlike.

Tabela 4.6. *Težina ribe u zavisnosti od temperature*

Težina	Temperatura	Težina	Temperatura
22	38	14	46
18	38	28	46
22	38	21	46
24	38	19	46
16	38	24	46
18	38	23	46
19	38	17	50
15	42	18	50
21	42	13	50
26	42	20	50
16	42	21	50
25	42	18	50
17	42		

Postupak sprovođenja testa je sledeći, slika 4.26:

1. **Stat > Nonparametrics > Mood's Median test**
2. U polje **Response** se unese Težina, a u polje **Factor** Temperatura
3. Ako se želi grafički prikazati podaci izabere se sledeće: **Graph > Individual Value Plot**, potom odabrati opciju **With Groups**. U polje **Graph Variables** uneti kolonu Težina, a u **Categorical variables for grouping** uneti kolonu Temperatura. U kartici **Data view** potrebno je izabrati opcije **Individual symbols**, **Median symbol** i **Median connect line**, zatim **OK**

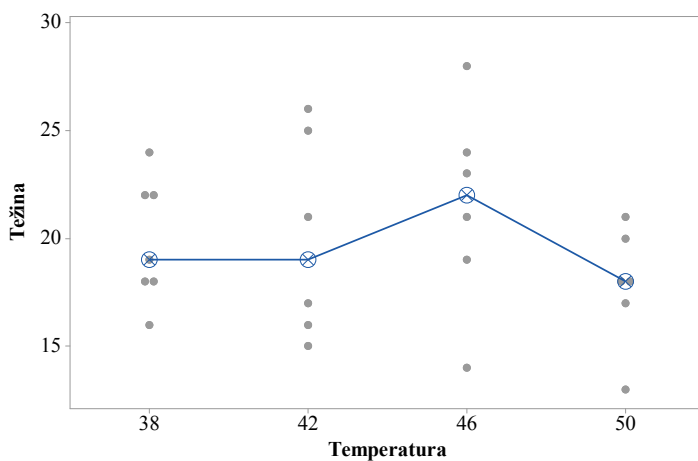


Slika 4.26. Postupak sprovođenja *Mood's Median testa*

Iz prozora rezultata može se uočiti da je $p=0,697$ što ukazuje da ne postoje statistički značajne razlike između četiri ispitivane grupe (promenljiva temperatura ima četiri nivoa), slika 4.27. Poređenje medijana za četiri različita nivoa ulazne promenljive je prikazano na dijagramu individualnih vrednosti, slika 4.28. (korak 3).

Mood Median Test: Težina versus Temperatura						
Mood median test for Težina						
Chi-Square = 1,44		DF = 3 $p = 0,697$				
Individual 95,0 % CIs						
Temperatura	$N \leq$	$N \geq$	Median	$Q3-Q1$	-----+-----+-----+-----	
38	4	3	19,0	4,0	(---*-----)	
42	3	3	19,0	9,5	(-----*-----)	
46	2	4	22,0	7,3	(-----*-----)	
50	4	2	18,0	4,3	(-----*-----)	
					-----+-----+-----+-----	
					17,5	21,0 24,5
Overall median = 19,0						

Slika 4.27. Rezultati *Mood's Median testa*



Slika 4.28. Grafički prikaz rezultata *Mood's Median testa*

5. ANALIZA VARIJANSE-ANOVA

Eksperimenti su prirodni deo inženjeringa i naučnog procesa donošenja odluka. Može se pretpostaviti npr., da građevinski inženjer istražuje efekat različitih metoda očvršćavanja na srednju čvrstoću betona. Eksperiment bi se sastojao od test primeraka betona koristeći svaki predložen metod očvršćavanja i zatim testiranja pritiska čvrstoće svakog primerka. Podaci ovog eksperimenta mogu se koristiti da odrede koji metod očvršćavanja treba da se koristi da pruži maksimalnu srednju vrednost čvrstoće.

Mnogi eksperimenti sa pojedinačnim faktorima zahtevaju da se više od dva nivoa faktora uzme u obzir. Na primer građevinski inženjer možda želi da istraži pet različitih metoda očvršćavanja. U ovom poglavlju se pokazuje kako analiza varijanse (često skraćeno ANOVA) se može koristiti za poređenje srednjih vrednosti kada postoji više od dva nivoa jednog faktora. Statističko zasnovano eksperimentalno projektovane tehnike su posebno korisne u inženjerskom svetu za poboljšanje performansi proizvodnog procesa. One takođe imaju veliku primenu u razvoju novih procesa. Većina procesa može biti opisana u smislu nekoliko kontrolisanih promenljivih, kao što su temperatura, pritisak i/ili režimi rezanja. Korišćenjem dizajna eksperimenta, inženjeri mogu odrediti koji podskup promenljivih procesa ima najveći uticaj na performanse procesa. Rezultati takvog eksperimenta mogu dovesti do:

- Poboljšanja prinosa procesa
- Smanjenja varijabilnosti u procesu i bližoj konformnosti nominalnim ili ciljanim zahtevima
- Smanjenja projektovanja i vremena razvoja
- Smanjenja troškova rada

Metode dizajna eksperimenta se takođe koriste u aktivnostima inženjerskog projektovanja, gde se razvijaju novi proizvodi i postojeći poboljšavaju. Neke tipične aplikacije statističkog dizajna eksperimenta u inženjerskom projektovanju uključuju:

- Procenu i poređenje osnovnih konfiguracija dizajna
- Procena različitih materijala
- Izbor parametara projektovanja tako da proizvod radi pod optimalnim uslovima
- Određivanje ključnih parametara dizajna proizvoda koji utiču na performanse proizvoda

Korišćenje eksperimentalnog dizajna u inženjerskom projektovanju procesa može rezultirati u proizvode koji će se lakše proizvoditi, proizvode koji imaju bolje performanse i pouzdanost nego njihovi konkurenti, i proizvodi koji mogu biti projektovani, razvijeni i izrađeni za kraće vreme.

Projektovanje eksperimenata se obično obavlja sekvencionalno. Prvi eksperiment sa kompleksnim sistemom (možda proizvodni proces) koji ima mnoge kontrolisane promenljive se naziva **screening** eksperiment dizajniran i on se koristi da odredi koje promenljive su najbitnije. Naredni eksperimenti se koriste da poboljšaju ove informacije i odrede koja prilagođavanja ovih kritičnih promenljivih se zahtevaju da poboljšaju proces. Na kraju, cilj eksperimenta je optimizacija, to jest, da se odredi koji nivo kritičnih promenljivih pruža u najbolje performanse procesa. Svaki eksperiment uključuje sledeće aktivnosti:

- Pretpostavka – originalna hipoteza koja motiviše eksperiment
- Eksperiment – test izveden da istraži pretpostavke
- Analize – statistička analiza podataka iz eksperimenta
- Zaključak – ono što se saznalo o originalnom nagađanju iz eksperimenta.

Analiza varijanse (ANOVA) je statistički alat koji se koristi za otkrivanje razlika između srednjih vrednosti eksperimentalnih grupa. Opravdanost primene ANOVE kod planiranja eksperimenta sa jednim faktorom varijabiliteta se ogleda u kontinualnim parametarskim numeričkim izlaznim rezultatima merenja i višestrukim eksperimentalnim grupama sa jednom ili više nezavisnih (kategoričnih) promenljivih. U ANOVA terminologiji, nezavisne promenljive se nazivaju **faktori**, a grupe sa svakim faktorom se nazivaju **nivoima**. U ANOVI se koristi sledeći niz pojmova: podela varijanse, glavni efekti, interakcije, faktori, F rezultati, procedure višestrukog poređenja, efekat veličine, statistička snaga, itd. Suština ANOVE se sastoji u tome da se ukupni varijabilitet posmatrane pojave, koja nastaje pod uticajem kontrolisanih i nekontrolisanih faktora, razlaže na sastavne komponente, tj. ukupna varijansa se razlaže na sastavne varijanse. Smer svih mogućih mera varijanse, koje se mogu formirati, raspoređuju se u obliku **Skender – Fišer**-ove raspodele.

Analiza varijanse je slična regresiji po tome što se koristi da istraži i modeluje odnos između odgovarajućih promenljivih jedne ili više nezavisnih promenljivih. Takođe, analiza varijanse produžava t -test dva uzorka za testiranje jednakosti dve populacije što znači da je opštija nulta hipoteza poređenja jednakosti više od dve srednje vrednosti a nasuprot tome je da nisu sve jednake.

U analizi varijanse može se vršiti ispitivanje uticaja:

- Jednog faktora varijabiliteta
- Dva faktora varijabiliteta
- Dva faktora varijabiliteta sa više posmatranja

5.1. Jednofaktorna ANOVA

Analiza varijanse jednog faktora varijabiliteta vrši ispitivanje uticaja jednog faktora varijabiliteta na vrednost numeričkog obeležja posmatrane pojave, na primer uticaj više tehnoloških procesa na kvalitet proizvoda.

Kod analize varijanse jednog faktora varijabiliteta polazi se od nulte hipoteze (H_0) da su aritmetičke sredine svih podskupova jednake. Pretpostavka je da postoje različiti nivoi jednog faktora (više od dva u suprotnom se može raditi t test) koji se porede. Ponekad, svaki nivo faktora se naziva tretman, veoma opšti pojam koji se može pratiti na ranije primene metodologije dizajna eksperimenta u poljoprivrednim naukama. Odgovor za svaki od tretmana je slučajna promenljiva. Posmatrani podaci će se pojaviti kao što je prikazano u tabeli. Unos u tabelu, recimo y_{ij} , predstavlja posmatranje (opservaciju) uzete pod tretmanom i . Razmatran je slučaj kada postoji jednak broj posmatranja, tabela 5.1.

Tabela 5.1. Tipičan prikaz podataka za jednofaktoran eksperiment

Faktor (tretman)	Posmatranja (opservacije)				Ukupno	
	1	2	...	n_i		
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}	$\sum y_1$	$\bar{y}_1$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}	$\sum y_2$	$\bar{y}_2$
.	.	.	...			
.	.	.	...			
.	.	.	...			
a	y_{a1}	y_{a2}		y_{an}	$\sum y_a$	$\bar{y}_n$

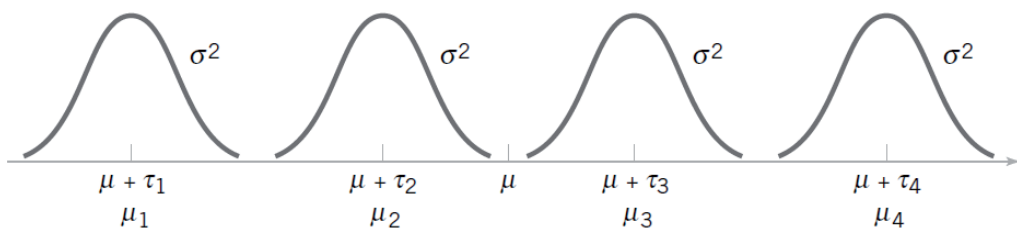
Svaka opservacija iz tabele se može opisati preko **linearnog statističkog modela**, jednačina 5.1.

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,a \\ j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (5.1.)$$

gde je Y_{ij} slučajna promenljiva koja označava ij opservaciju, μ je parametar zajednički za sve tretmane nazvan opšta srednja vrednost, τ_i je parametar pridružen sa i -tim tretmanom i naziva i -ti efekat tretmana, i ε_{ij} je komponenta slučajne greške. Model se takode može napisati kao jednačina 5.2:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,a \\ j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (5.2.)$$

gde je $\mu_i = \mu + \tau_i$ srednja vrednost i -tog tretmana. Iz oblika ovog modela može se zaključiti da svaki tretman definiše populaciju koja ima srednju vrednost μ_i koja sadrži ukupnu srednju vrednost plus efekat τ_i koji nastaje zbog tog posebnog tretmana. Pretpostavka je da su greše ε_{ij} normalne raspodele i nezavisno raspoređenje sa srednjom vrednošću nula i varijansom σ^2 . Stoga, svaki tretman se može posmatrati kao normalna populacija sa srednjom vrednošću μ_i i varijansom σ^2 (slika 5.1.).



Slika 5.1. Raspodele svakog tretmana (nivoa) faktora

Jednačina linearnog statističkog modela je osnovni model za jednofaktorni eksperiment. Osim toga, pošto se zahteva da se opservacije uzmu slučajnim redom i da je okruženje (često nazvane eksperimentalne jedinice) u kojima su tretmani korišćeni uniformni ako je to moguće, ovaj eksperimentalni dizajn je nazvan **kompletno randomiziran dizajn**.

Pravilno zaključivanje na osnovu analize varijanse zahteva ispunjenje određenih pretpostavki:

1. Slučajne greške imaju normalnu raspodelu
2. Matematičko očekivanje (srednja vrednost) slučajne greške je nula
3. Varijanse slučajnih grešaka jednake su varijansi osnovnog skupa, odnosno zastupljena je homogenost varijansi
4. Slučajne greške su međusobno nezavisne
5. Zastupljena je aditivnost

Nivoi faktora u eksperimentu mogu biti izabrani na dva različita načina. Prvi, osoba koja sprovodi eksperiment bi mogla posebno izabrati tretmane. U ovoj situaciji, žele se testirati hipoteze o srednjim vrednostima tretmana i zaključci ne mogu biti prošireni na slične tretmane koji nisu bili posmatrani. Pored toga, žele se proceniti efekti tretmana. Ovo se naziva **model fiksnih efekata**. Alternativno, tretmani mogu biti slučajno uzorkovani iz velike populacije tretmana. U ovoj situaciji, postoji mogućnost proširenja na zaključke (koji su zasnovani na uzorkovanju tretmana) svih tretmana u populaciji, bez obzira da li su oni ili nisu eksplicitno razmatrani u eksperimentu. Ovde su efekti tretmana τ_i slučajne promenljive, i znanje o posebnim istraživanjima je relativno nevažno. Umesto toga, testiraju se hipoteze o varijabilnosti τ_i i pokušavaju se proceniti ove varijabilnosti. Ovo se zove **model slučajnih efekata**, ili komponente varijanse.

U nastavku će se razviti analiza varijanse za model fiksnih efekata i biće pokazato kako se može koristiti za testiranje jednakosti efekata tretmana. U modelu fiksnih efekata, efekat tretmana τ_i se obično definiše kao odstupanja od sveukupne srednje vrednosti μ , jednačina 5.3.

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0 \quad (5.3.)$$

Neka $y_{i..}$ predstavlja ukupnu opservaciju pod i -tim tretmanom a $y_{i.}$ predstavlja srednju vrednost opservacije pod i -tim tretmanom. Slično, neka $\bar{y}_{..}$ predstavlja srednju veličinu svih opservacija a $\bar{y}_{.}$ predstavlja srednju vrednost svih opservacija. Izraženo matematički ovo se može prikazati preko jednačine 5.4. i jednačine 5.5.

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n} \quad i=1,2,...,a \quad (5.4.)$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad \bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N} \quad (5.5.)$$

gde je $N=an$ ukupan broj opservacija. Stoga „tačka“ notacija u subskriptu podrazumeva zbir preko subskripta koje zamenjuje.

Sada se žele testirati jednakosti srednjih vrednosti tretmana $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_a$. Koristeći jednačinu 5.3, to je ekvivalentno testiranju hipoteza, jednačina 5.6:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 \\ H_1: & \quad \tau_i \neq 0 \text{ za najmanje jedno } i \end{aligned} \quad (5.6.)$$

Stoga, ako je nulta hipoteza istinita, svaka opservacija sadrži sveukupnu srednju vrednost μ plus realizaciju komponente slučajne greške ε_{ij} . To je ekvivalentno reći da sve N opservacije su uzete iz normalne raspodele sa srednjom vrednošću μ i varijansom σ^2 . Stoga, ako je nulta hipoteza istinita, menjanje nivoa faktora nema efekta na srednju vrednost.

ANOVA rasparčava ukupnu varijabilnost u uzorkovanim podacima u dva sastavna dela. Zatim, testiranje hipoteza u jednačini 5.6. je zasnovano na poređenju dve nezavisne procene varijanse populacije. Ukupna varijabilnost u podacima je opisana preko ukupnog zbira kvadrata, jednačina 5.7:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \quad (5.7.)$$

Podela ukupnog zbira kvadrata je data prema sledećoj definiciji, jednačina 5.8. i jednačina 5.9:

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \quad (5.8.)$$

ili

$$SS_T = SS_{Tretmana} + SS_E \quad (5.9.)$$

Istovetnost u jednačini 5.9. pokazuje da ukupna varijabilnost u podacima, merena preko ukupnog korigovanog zbira kvadrata SS_T , može biti podeljena u zbir kvadrata razlika između srednjih vrednosti tretmana i srednje vrednosti označene sa $SS_{Tretmani}$ i zbir kvadrata razlika opservacija u okviru tretmana iz srednje vrednosti tretmana označene sa SS_E . Razlike između srednjih vrednosti opservacija tretmana i ukupne srednje vrednosti je mera razlika između tretmana, dok razlike opservacija u okviru tretmana iz srednjih vrednosti tretmana mogu biti samo zbog slučajnih grešaka.

Može se dobiti značajan uvid u to kako analiza varijanse radi preko ispitivanja očekivanih vrednosti $SS_{Tretmana}$ i SS_E . Ovo dovodi do odgovarajuće statistike za testiranje hipoteza da nema razlika između srednjih vrednosti tretmana tj. $\tau_i = 0$.

Očekivana vrednost sume kvadrata tretmana je, jednačina 5.10:

$$E(SS_{Tretmana}) = (a-1)\sigma^2 + n \sum_{i=1}^a \tau_i^2 \quad (5.10)$$

a očekivana vrednost sume kvadrata greške je, jednačina 5.11:

$$E(SS_E) = a(n-1)\sigma^2 \quad (5.11)$$

Ovde takođe postoji deljenje broja stepeni slobode koji odgovara zbiru kvadrata. Tako da, postoji $an = N$ opservacija; stoga, SS_T ima $an-1$ stepen slobode. a predstavlja nivoe faktora i $SS_{Tretmani}$ imaju $a-1$ stepen slobode. Na kraju, u okviru svakog tretmana postoji n ponavljanja što obezbeđuje $n-1$ stepen slobode sa kojim se procenjuje greška eksperimenta. Pošto postoji a tretmana, postoji $a(n-1)$ stepeni slobode za grešku. Stoga, podela stepeni slobode je, jednačina 5.12:

$$an - 1 = a - 1 + a(n - 1) \quad (5.12.)$$

Odnos prikazan preko jednačine 5.13.

$$MS_{Tretmani} = SS_{Tretmani} / (a-1) \quad (5.13.)$$

se naziva srednja vrednost kvadrata za tretmane. Sada, ako je nulta hipoteza $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots \tau_a = 0$ istinita, $MS_{Tretmani}$ su nepristrasno procenjivani σ^2 zato što je $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$. Međutim, ako je H_1 hipoteza istinita, $MS_{Tretmani}$ procenjuju σ^2 pozitivan termin koji uključuje varijaciju zbog sistematskih razlika u srednjim vrednostima tretmana.

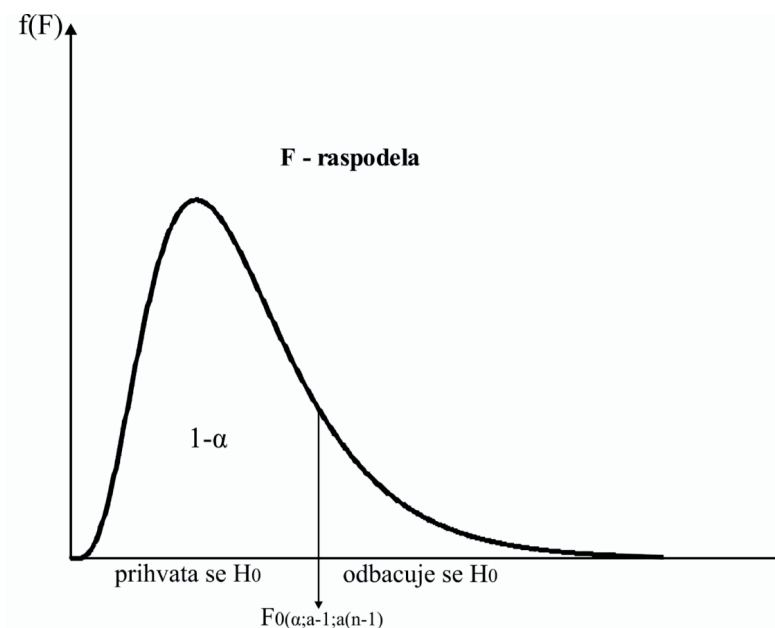
Treba imati na umu da je greška kvadrata srednjih vrednosti, jednačina 5.14:

$$MS_E = SS_E / [a(n-1)], \quad (5.14.)$$

nepistrasno kalkulant σ^2 bez obzira da li je H_0 istinito ili nije. Takođe se može pokazati da su $MS_{Tretmani}$ i MS_E nezavisni. Shodno tome, može se pokazati da ako je nulta hipoteza H_0 istinita, odnos, jednačina 5.15:

$$F_0 = \frac{SS_{Tretmana}/(a-1)}{SS_E/[a(n-1)]} = \frac{MS_{Tretmana}}{MS_E} \quad (5.15.)$$

ima F raspodelu sa $a - 1$ i $a(n - 1)$ stepenom slobode. Šta više, iz očekivane srednje vrednosti kvadrata, se zna da MS_E je nepristrastan kalkulant (procenitelj) σ^2 . Takođe, pod nultom hipotezom, $MS_{Tretmani}$ je nepristrastan procenitelj σ^2 . Stoga, pod alternativnom hipotezom, očekivana vrednost u brojiocu test statistike je veća od očekivane vrednosti u imeniocu. Shodno tome, trebalo bi odbaciti H_0 ako je statistika velika. Stoga, odbacuje se H_0 ako je $f_0 > F_{\alpha, a-1, a(n-1)}$ gde je f_0 izračunata vrednost od F_0 iz jednačine. Vrednost $F_{\alpha, a-1, a(n-1)}$ je tablična vrednost. F raspodela i polja prihvatanja/odbacivanja nulte hipoteze su prikazana na slici 5.2.



Slika 5.2. F raspodela

Efikasne računске formule za sume kvadrata mogu biti dobijene širenjem i pojednostavljenjem definicija $SS_{Tretmana}$ i SS_T . Na taj način dobijaju se jednačina 5.16. jednačina 5.17. i jednačina 5.18.

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y^2_{..}}{N} \quad (5.16.)$$

$$SS_{Tretmana} = \sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{n} - \frac{y^2_{\cdot\cdot}}{N} \quad (5.17.)$$

$$SS_E = SS_T - SS_{Tretmana} \quad (5.18.)$$

Proračuni za test procedure su obično sažete u tabelarnom obliku kako je prikazano u tabeli 5.2. Ovo se naziva tabela analize varijanse (ANOVA).

Tabela 5.2. ANOVA tablica

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F ₀
Tretmani	$SS_{Tretmana}$	$a-1$	$MS_{tretmana}$	$\frac{MS_{Tretmana}}{MS_E}$
Greška	SS_E	$a(n-1)$	MS_E	
Ukupno	SS_T	$an-1$	-	-

Primer: Inženjeri u proizvodnji su zainteresovani da ispituju da li postoje značajne razlike u kvalitetu obrađene površine (hrapavost izražena preko R_a) radnih komada ako se primene četiri različita postupka završne obrade. Ispitivane obrade su bile: honovanje, brušenje, superfiniš i obrada ultrazvukom. Cilj ispitivanja je bio sledeći: ukoliko se pokaže da ne postoje značajne razlike u hrapavosti obrađene površine, onda se radni komadi mogu obrađivati na sve četiri mašine istovremeno. U potpuno randomiziranom eksperimentu svaki tretman (proces obrade) je imao po šest opservacija, tabela 5.3. Rezultati merenja su izmišljeni.

Tabela 5.3: Rezultati merenja površinske hrapavosti R_a u μm

Obradni proces	Posmatranja (opservacije)						Ukupno	Srednja vrednost
	1	2	3	4	5	6		
Brušenje	7	8	15	11	9	10	60	10
Honovanje	12	17	13	18	19	15	94	15.67
Superfiniš	14	18	19	17	16	18	102	10
Obrada ultrazvukom	19	25	22	23	18	20	127	21.17
							383	15.96

Postavljaju se hipoteze:

H_0 : $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$; tj. vrsta obradnog procesa ne utiče na R_a

H_1 : $\tau_i \neq 0$ za najmanje jedno i ; tj. bar jedan obradni proces se razlikuje

Za prag značajnosti je usvojeno $\alpha=0.01$ (interval poverenja 99 %). Sume kvadrata za analizu varijanse su proračunate iz prethodnih jednačina.

$$SS_T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 y_{ij}^2 - \frac{y^2_{..}}{N} = (7)^2 + (8)^2 + \dots + (20)^2 - \frac{(383)^2}{24} = 512.96$$

$$SS_{Tretmana} = \sum_{i=1}^4 \frac{y_i^2}{n} - \frac{y^2_{..}}{N} = \frac{(60)^2 + (94)^2 + (102)^2 + (127)^2}{6} - \frac{(383)^2}{24} = 382.79$$

$$SS_E = SS_T - SS_{Tretmana} = 512.96 - 382.79 = 130.17$$

ANOVA je sumirana u tabeli 5.4. Pošto $f_{0.01,3,20}=4.94$ (tablična vrednost F -raspodele, prilog I), odbija se H_0 i može se zaključiti da vrsta obradnog procesa značajno utiče na srednju vrednost kvaliteta obrađene površine predstavljene preko R_a .

Tabela 5.4. ANOVA tablica za primer

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F_0
Vrsta obradnog procesa	382.79	3	127.60	19.60
Greška	130.17	20	6.51	
Ukupno	512.96	23	-	-

Kada je nulta hipoteza odbijena u ANOVI; znači da je neka srednja vrednost tretmana ili nivoa faktora različita. Međutim, ANOVA ne identifikuje koje srednje vrednosti su različite. Metode za istraživanje ovih pitanja se nazivaju metode višestrukih poređenja ili Post ANOVA testovi. Postoje mnogi testovi za sprovođenje Post ANOVE a u nastavku će biti opisan Tukey-ev test.

5.2. Post ANOVA-Tukey test

Tukey-ev test izračunava kritičnu vrednost koja se koristi za procenu značajnosti poređenih (parova) srednjih vrednosti skupova. Test omogućava poređenje svih mogućih parova srednjih vrednosti osnovnih skupova. Svi parovi $|\bar{y}_i - \bar{y}_j|$ se porede sa Tukey – ovom kritičnom vrednosti, jednačina 5.19:

$$T_\alpha = g_\alpha(a, f) \sqrt{\frac{MS_E}{n}}, \quad (5.19.)$$

gde je $g_\alpha(a, f)$ gornje α procentualna tačka statistike Studentovog opsega, a je broj tretmana i f je broj parnih stepeni slobode.

Ako je apsolutna razlika između parova srednjih vrednosti veća od Tukey-eve kritične vrednosti, tj. jednačina 5.20.

$$|\bar{y}_i - \bar{y}_j| \geq g_\alpha(a, f) \sqrt{\frac{MS_E}{n}}, \quad (5.20)$$

konstatuje se da su razlike između parova srednjih vrednosti statistički značajne, suprotno, ako su manje, razlike između parova nisu statistički značajne.

Sprovođenje Tukey-evog testa iz primera

Na osnovu rezultata iz primera konstatovano je da vrsta obradnog procesa utiče na kvalitet obrade i da su razlike među njima značajne, te je potrebno testirati međugrupne razlike pomoću Tukey-evog testa i videti gde se te razlike nalaze.

Za dobijanje vrednosti t koristi se tablica kritičnih vrednosti Studentove t raspodele (prilog II).

$$g_\alpha(a, f) = 4.46$$

Tukey-ev kriterijum za odlučivanje u ovom slučaju iznosi:

$$T = 4.46 \sqrt{\frac{6.51}{6}} = 3.96$$

Apsolutne vrednosti razlike parova srednjih vrednosti osnovnog skupa su:

$$\begin{aligned} |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| &= |10 - 15.67| = 5.67 \\ |\bar{y}_1 - \bar{y}_3| &= |10 - 17| = 7 \\ |\bar{y}_1 - \bar{y}_4| &= |10 - 21.17| = 11.17 \\ |\bar{y}_2 - \bar{y}_3| &= |15.67 - 17| = 1.33 \\ |\bar{y}_2 - \bar{y}_4| &= |15.67 - 21.17| = 5.5 \\ |\bar{y}_3 - \bar{y}_4| &= |17 - 21.17| = 4.17 \end{aligned}$$

Na osnovu Tukey-evog testa sledi, da na pragu značajnosti $\alpha = 0.01$, da između obradnih procesa brušenje i honovanje; brušenje i superfiniš; brušenje i ultrazvuk; honovanje i ultrazvuk i superfiniš i ultrazvuk postoji značajna statistička razlika u prosečnim vrednostima Ra .

5.3. ANOVA u Minitabu

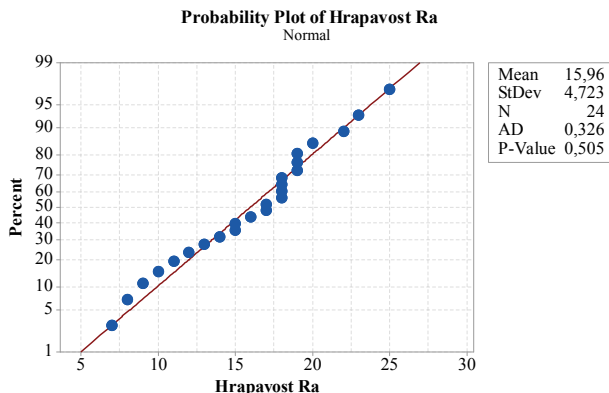
Pre sprovođenja analize varijanse u Minitabu, potrebno je ispitati da li izmereni podaci podležu normalnoj raspodeli i da li je zastupljena homogenost varijansi. Analiza varijanse može da se sprovede ako podaci ne podležu normalnoj raspodeli, ali uslov o homogenosti varijanse mora biti zadovoljen.

Sve izmerene podatke treba svrstati u jednu kolonu i shodno tome u drugu kolonu treba upisati tretmane faktora, tj. u ovom slučaju vrstu obradnog procesa, slika 5.3.

•	C1	C2-T
	Hrapavost Ra	Vrsta obradnog postupka
1	7	Brušenje
2	8	Brušenje
3	15	Brušenje
4	11	Brušenje
5	9	Brušenje
6	10	Brušenje
7	12	Honovanje
8	17	Honovanje
9	13	Honovanje
10	18	Honovanje
11	19	Honovanje
12	15	Honovanje
13	14	Superfiniš
14	18	Superfiniš
15	19	Superfiniš
16	17	Superfiniš
17	16	Superfiniš
18	18	Superfiniš
19	19	Ultrazvuk
20	25	Ultrazvuk
21	22	Ultrazvuk
22	23	Ultrazvuk
23	18	Ultrazvuk
24	20	Ultrazvuk

Slika 5.3. Uoženje podataka u Minitab za sprovođenje ANOVE

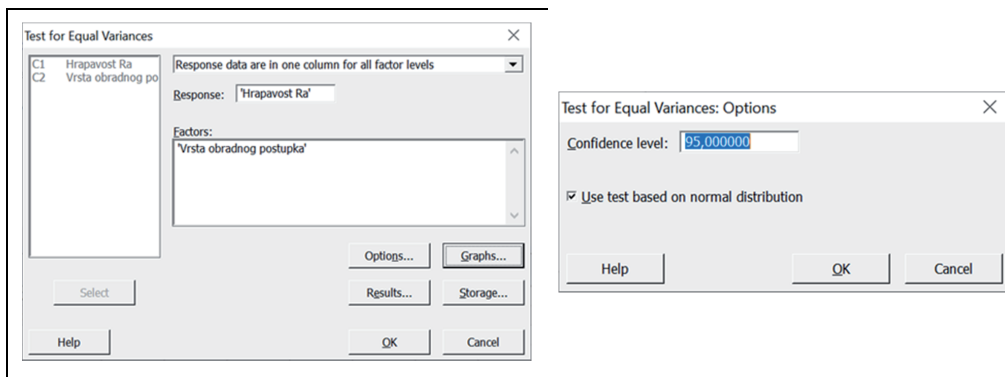
Za proveru normalnosti koristi se Anderson – Darling test. Usvaja se prag značajnosti $\alpha=0.05$.



Slika 5.4. Ispitivanje normalnosti rezultata merenja hrapavosti

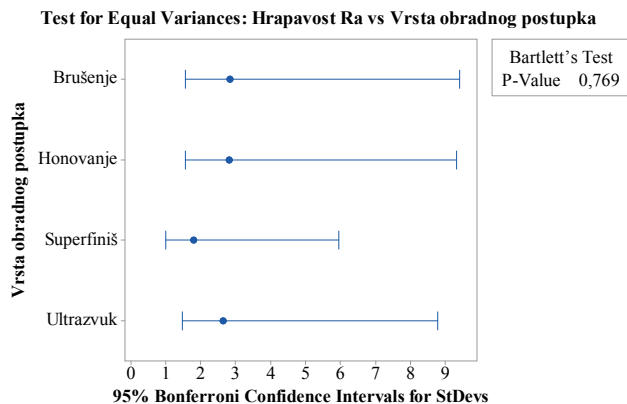
Na osnovu p vrednosti može se zaključiti da podaci imaju normalnu raspodelu ($0,519 > 0,05$). Kako je već napomenuto uslov normalnosti ne mora biti u svim slučajevima zadovoljen, ali jednakost varijansi mora biti zadovoljena da bi se ispravno sprovedla ANOVA. Za proveru homogenosti varijanse u Minitabu koriste se sledeće, slika 5.5:

1. **Stat > ANOVA > Test for Equal Variances**
2. U **Response** unosi se Kvalitet obrađene površine a u **Factors** Obradni proces
3. Ako je raspodela normalna uljuči se opcija u **Options > Use test on normal distribution**
4. **OK**



Slika 5.5. Postupak ispitivanja jednakosti varijansi

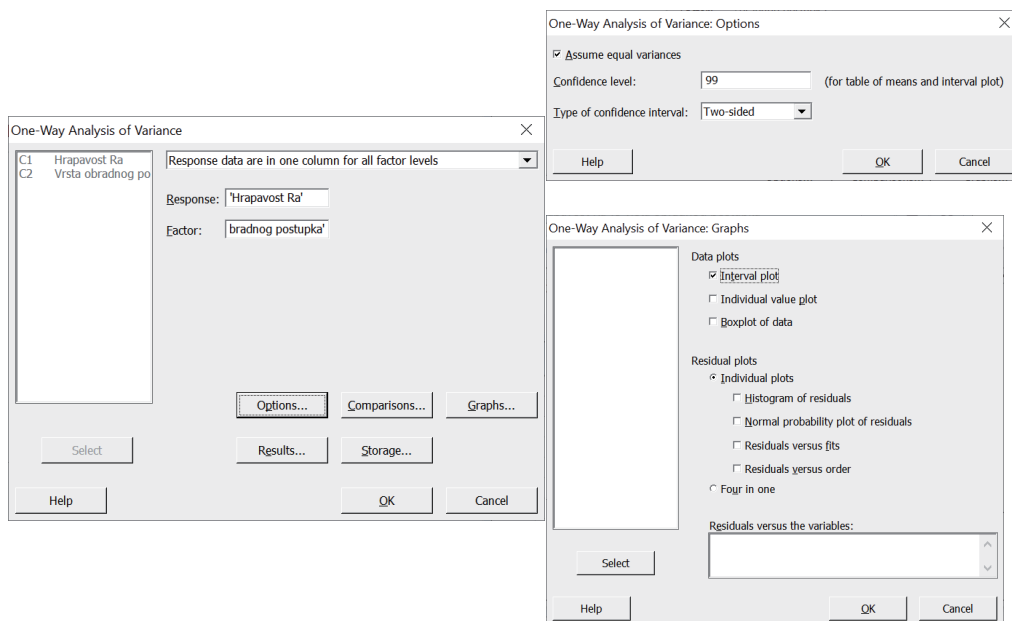
U zavisnosti da li je normalna raspodela ili ne, koristi se Barlett-ov test ili Levene-ov test za interval poverenja 95 %. Pošto su u ovom slučaju postoji normalna raspodela podataka sprovodi se Barlett-ov test. Pošto je vrednost za p veća od praga značajnosti $\alpha=0.05$ (sledi iz intervala poverenja 95 %) može se zaključiti da je zastupljena homogenost varijansi, slika 5.6.



Slika 5.6. Grafički prikaz rešenja ispitivanja jednakosti varijanse

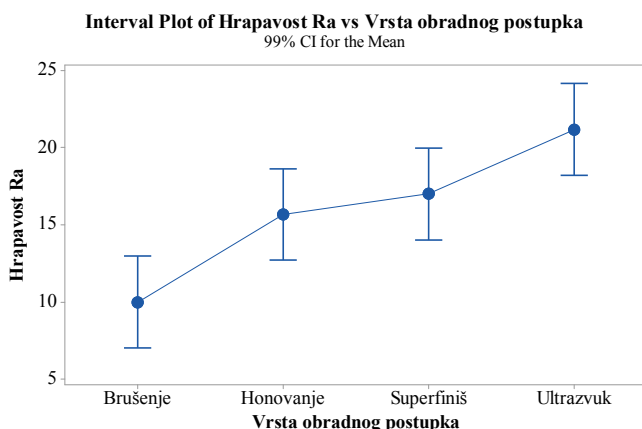
Procedura sprovođenja ANOVE u Minitabu je sledeća, slika 5.7:

1. **Stat > ANOVA > One-Way Analysis of Variances**
2. U **Response** unosi se Kvalitet obrađene površine, a u **Factor** Obradni proces
3. Zatim **Options** u polje **confidence level** uneti 99, **OK**
4. Klik na **Graphs** i odabrati **Interval plot**
5. **OK**



Slika 5.7. Postupak sprovođenja ANOVE

Poređenje četiri nivoa faktora prikazano je grafički na slici 5.8. Na slici 5.9. prikazani su rezultati ANOVA testa u prozoru rezultata Minitaba. Analizom rezultata može se zaključiti da se rezultati slažu sa proračunskim rezultatima iz ANOVA tabele 5.4. Na osnovu vrednosti $p < 0.01$, zaključuje se da je nulta hipoteza odbijena. Nakon odbacivanja nulte hipoteze potrebno je ponovo na identičan način sprovesti ANOVU stim što treba aktivirati opciju **Comparisons** i u njoj aktivirati **Tukey**. Rezultati post ANOVE prikazani su na slici 5.10. koja prikazuje radni prozor Minitaba i grafički prikaz je dat na slici 5.11. koji je jednostavniji je za tumačenje. Ako interval preseca nultu liniju u tom slučaju ne postoji statistička značajnost između ispitivanih grupa i obrnuto, ako interval ne uključuje nulu liniju postoje značajne razlike između ispitivanih grupa. Sa slike 5.11. se može zaključiti da se rezultati iz Minitaba podudaraju sa računskim podacima.



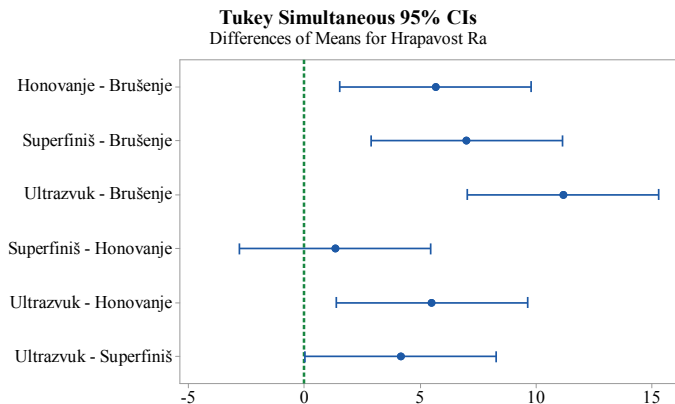
Slika 5.8. Grafički prikaz poređenja srednjih vrednosti nivoa datog faktora

One-way ANOVA: Hrapavost <i>Ra</i> versus Vrsta obradnog postupka					
Method					
Null hypothesis		All means are equal			
Alternative hypothesis		At least one mean is different			
Significance level		$\alpha = 0,01$			
Equal variances were assumed for the analysis.					
Factor Information					
Factor	Levels	Values			
Vrsta obradnog postupka	4	Brušenje; Honovanje; Superfinaš; Ultrazvuk			
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	<i>p</i> -Value
Vrsta obradnog postupka	3	382,8	127,597	19,61	0,000
Error	20	130,2	6,508		
Total	23	513,9			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
2,55114	74,62 %	70,82 %	63,46 %		
Means					
Vrsta obradnog postupka	N	Mean	StDev	99 % CI	
Brušenje	6	10,00	2,83	(7,04; 12,96)	
Honovanje	6	15,67	2,80	(12,70; 18,63)	
Superfinaš	6	17,000	1,789	(14,037; 19,963)	
Ultrazvuk	6	21,17	2,64	(18,20; 24,13)	
Pooled StDev = 2,55114					

Slika 5.9. Rezultati ANOVA testa

Tukey Pairwise Comparisons			
Grouping Information Using the Tukey Method and 95 % Confidence			
Vrsta obradnog postupka	N	Mean	Grouping
Ultrazvuk	6	21,17	A
Superfinaš	6	17,000	B
Honovanje	6	15,67	B
Brušenje	6	10,00	C
Means that do not share a letter are significantly different.			

Slika 5.10. Rezultati Tukey poređenja



Slika 5.11. Grafički prikaz Tukey poređenja

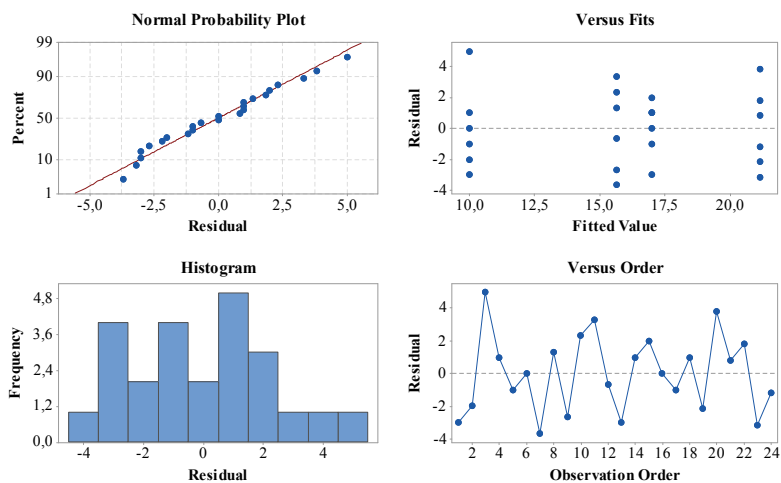
5.4. Analiza reziduala

Analiza varijanse pretpostavlja da su opservacije nezavisno i normalno raspoređene sa istom varijansom za svaki tretman ili nivo faktora. Pored testova normalnosti i jednakosti varijansi ove pretpostavke se mogu proveriti ispitivanjem reziduala (ostataka). Rezidual je razlika između opservacije y_{ij} i njegove procenjene (ili fitovane) vrednosti od statističkog modela, označenog kao $\hat{y}_{ij}$. Za kompletno randomiziran dizajn $\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i.}$ svaki rezidual je $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i.}$, to jest, razlika između opservacija i odgovarajuće srednje vrednosti posmatranog tretmana. Reziduali za predhodni eksperiment su prikazani u tabeli 5.5. Reziduali u principu sadrže informacije o neobjašnjenjivosti varijabilnosti. Pretpostavka normalnosti se može proveriti konstruisanjem dijagrama normalne raspodele za rezidualne. Da bi se proverila pretpostavka o jednakim varijansama na svakom nivou faktora, potrebno je nacrtati rezidualne u odnosu na nivoe faktora i uporediti širenje u rezidualima. U Minitabu postoje četiri različita prikaza raspodele reziduala, slika 5.12. i dobijaju se kada se u opciji **Graphs** izabere **Four in one**, slika 5.7.

Tabela 5.5. Reziduali

Obradni proces	Reziduali (ostaci)					
	1	2	3	4	5	6
Brušenje	-3	-2	5	1	-1	0
Honovanje	-3.67	1.33	-2.67	2.33	3.33	-0.67
Superfinaš	-3	1	2	0	-1	1
Obrada ultrazvukom	-2.17	3.83	0.83	1.83	-3.17	-1.17

Residual Plots for Hrapavost Ra



Slika 5.12. Grafički prikaz reziduala

Prikaz reziduala iz primera potvrđuje pretpostavke o normalnosti i homogenosti varijansi analiziranih podataka.

6. DIZAJNIRANJE EKSPERIMENTA SA NEKOLIKO FAKTORA (DOE)

Postoje dve glavne viševarijantne optimizacijske strategije, koje se nazivaju redna ili sekvencijalna (*eng. sequential optimization strategy*) i istovremena ili simultana (*eng. simultaneous optimization strategy*). Redni dizajn se koristi kad je optimum pojedinačnog odziva jedina željena informacija, npr. kad se ne želi model koji povezuje odziv i promenljive. Istovremeni dizajn prikladan je pri modeliranju, ali može poslužiti i u optimizacijske svrhe. Karakteristika tog planiranja jeste definisanje plana eksperimenta pre početka merenja. Eksperimenti se po pravilu ne izvode naknadno. Istovremeni dizajni se još nazivaju faktorskim dizajnima. Eksperiment (opit) predstavlja test ili niz testova. Eksperimenti se obavljaju u svim inženjerskim i naučnim disciplinama i bitan su deo puta saznanja kako sistem ili proces funkcioniše. Validnost zaključka koji je izvučen iz eksperimenta zavisi u velikoj meri od toga kako je eksperiment sproveden. Stoga, dizajn eksperimenta igra glavnu ulogu u eventualnom rešavanju problema koji je prvobitno inicirao eksperiment. Ovo poglavlje se fokusira na eksperimente koji uključuju dva ili više faktora. Faktorijalni dizajn eksperimenta će biti predstavljen kao snažna tehnika za ovaj tip problema. Generalno, u faktornom dizajnu eksperimenta, eksperimentalna postavka (tačke) se izvode na svim kombinacijama nivoa faktora. Na primer, ako je hemijski inženjer zainteresovan za ispitivanja vremena reakcije i temperature reakcije na prinos procesa, i ako su dva nivoa vremena (1 i 2 sata) i dva nivoa temperature (125 °C i 150 °C) posmatrani kao važni, faktorijalni eksperiment bi se sastojao od izrade eksperimentalnih tačaka svaku od četiti moguće kombinacije ovih nivoa reakcije vremena i temperature reakcije. Većina statističkih koncepata uključenih za pojedinačne faktorske eksperimente mogu biti proširene na faktorske eksperimente ovog poglavlja. Analiza varijanse (ANOVA), posebno, će nastaviti da se koristi kao jedan od primarnih alata za statističku obradu podataka.

U eksperimentalnom dizajnu upotrebljavaju se sledeći termini:

- **eksperimentalni domen** - predstavlja područje ispitivanja, odnosno raspon minimalnih i maksimalnih vrednosti ispitivanih varijabli (uslova, parametara)
- **dizajn eksperimenta** - predstavlja set eksperimenata određenih matricom koja nastaje različitim kombinacijama ispitivanih promenljivih
- **faktori ili nezavisne promenljive** – promenljive koje se mogu menjati nezavisno jedne od drugih i koje se kontrolišu tokom procesa (npr. temperatura, vreme, protok, itd.)
- **nivo promenljivih** – različite vrednosti promenljivih pri kojima će se eksperiment izvršiti (npr. temperatura na 3 nivoa: 30, 50 i 70 °C) da bi se optimizovao neki proces.

- **odziv ili zavisna promenljiva** – predstavljaju izmerene vrednosti eksperimenta (npr. hrapavost obrađene površine),
- **ostatak (eng. residual)** – predstavlja razliku između izračunatih i eksperimentalno određenih podataka odnosno onaj deo varijabilnosti koji nije moguće objasniti modelom. Dobra aproksimacija eksperimentalnih podataka matematičkim modelom predstavljena je niskim vrednostima ostataka.

Kada je nekoliko faktora od interesa u eksperimentu, treba da se koristi faktorijalni dizajn eksperimenta. Kao što je ranije navedeno, u ovim eksperimentima faktori su varirani zajedno. Stoga, ako postoje dva faktora *A* i *B* sa *a* nivoima faktora *A* i *b* nivoima faktora *B*, svako ponavljanje sadrži sve *ab* kombinacije tretmana.

Efekat faktora se definiše kao promena odziva proizvedeno preko promene u nivou faktora. Ovo se naziva glavni efekat zato što se odnosi na primarne faktore u studiji. Na primer, razmatraju se podaci u tabeli 6.1. Ovo je faktorni eksperiment sa dva faktora, *A* i *B*, svaki na dva nivoa (*Anizak*, *Avisok*, i *Bnizak*, *Bvisok*). Glavni efekat faktora *A* je razlika između prosečnog odziva na visokom nivou *A* i prosečnog odziva na niskom nivou *A*, ili

$$A = \frac{30+40}{2} - \frac{10+20}{2} = 20,$$

što znači da menjajući faktor *A* od niskog do visokog nivoa prosečan odziv je 20. Slično, glavni efekat faktora *B* je:

$$B = \frac{20+40}{2} - \frac{10+30}{2} = 10.$$

U nekim eksperimentima, razlike u odzivima između nivoa jednog faktora nije ista kao na svim nivoima drugih faktora. Kada se ovo desi, postoji interakcija između faktora. Primer je dat za podatke u tabeli 6.2. Na nižem nivou faktora *B*, *A* efekat je $A=30-10=20$, a na višem nivou faktora *B*, efekat *A* je $A=0-20=-20$. Pošto efekat *A* zavisi od nivoa faktora *B*, postoji interakcija između *A* i *B*. Kada je interakcija velika, odgovarajući glavni efekti imaju malo praktično značenje. Na primer, korišćenjem podataka u tabeli 6.2, glavni efekat faktora *A* je

$$A = \frac{30+0}{2} - \frac{10+20}{2} = 0,$$

i može se zaključiti da ne postoji efekat faktora *A*. Međutim, kada se ispituju efekti *A* na različitim nivoima faktora *B*, vidi se da to ne bi bio slučaj. Efekat faktora *A* zavisi od nivoa faktora *B*. Stoga, znanje od interakcije *AB* je mnogo korisnije od glavnog efekta. Značajnost interakcije može maskirati značajnost glavnih efekata. Shodno tome, kada je prisutna interakcija, glavni efekti faktora uključenih u interakciju ne moraju imati mnogo smisla.

Tabela 6.1. Faktorski eksperiment bez interakcije

Faktor A	Faktor B	
	B_{nisko}	B_{visoko}
A_{nisko}	10	20
A_{visoko}	30	40

Tabela 6.2. Faktorski eksperiment sa interakcijom

Faktor A	Faktor B	
	B_{nisko}	B_{visoko}
A_{nisko}	10	20
A_{visoko}	30	0

Lako je proceniti efekat u faktorijskim eksperimentima kao što su oni ilustrovani u tabelama 6.1 i 6.2. U ovom tipu eksperimenta, kada oba faktora imaju dva nivoa, AB efekat interakcije je razlika u preseku dijagonala. Ovo predstavlja jednu polovinu razlike između A efekata na dva nivoa B . Na primer u tabeli 6.1, AB interakciju efekta je:

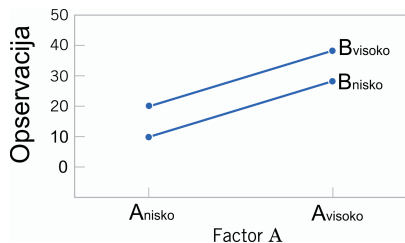
$$AB = \frac{20+30}{2} - \frac{10+40}{2} = 0,$$

stoga, ne postoji interakcija između A i B . U tabeli 6.2, efekat AB interakcije je:

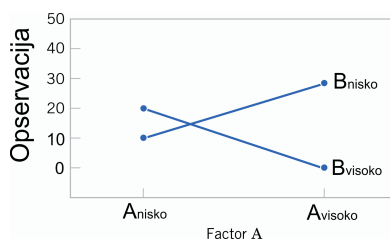
$$AB = \frac{20+30}{2} - \frac{10+0}{2} = 20$$

Kako je navedeno ranije, interakcijski efekat ovih podataka je veoma velik.

Koncept interakcije može biti ilustrovan grafički na nekoliko načina. Slika 6.1 prikazuje podatke iz tabele 6.1. nasuprot nivoima A za oba nivoa B . Sa slike se vidi da su linije B_{nisko} i B_{visoko} paralelne, što ukazuje da faktori A i B nemaju značajnu interakciju. Slika 6.2 predstavlja sličan dijagram za podatke u tabeli 6.2. U ovom dijagramu, B_{nisko} i B_{visoko} linije nisu paralelne, što ukazuju na interakciju između faktora A i B . Ovakav grafički prikaz se naziva dvofaktorni dijagram interakcije. On se često koristi u predstavljanju rezultata eksperimenata, i mnogi softverski programi koji se koriste za analizu podataka iz projektovanog eksperimenta će automatski konstruisati ovaj dijagram.

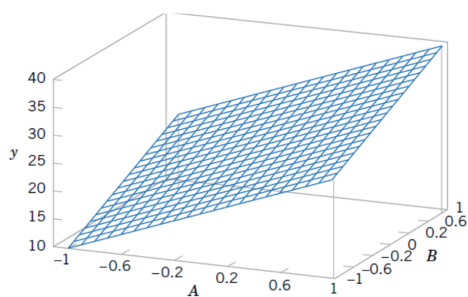


Slika 6.1. Faktorski eksperiment bez interakcije

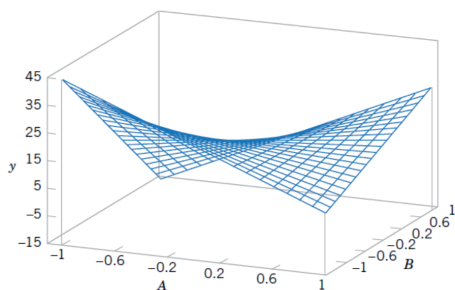


Slika 6.2. Faktorski eksperiment sa interakcijama

Slika 6.3. i slika 6.4. predstavljaju druge grafičke prikaze podataka iz tabela 6.1 i 6.2. Na slici 6.3. prikazan je trodimenzionalni površinski dijagram podataka iz tabele 6.1. Ovi podaci ne sadrže interakcije i površinski dijagram je ravan koja leži iznad A - B prostora. Nagib ravni A i B pravca je proporcionalan glavnim efektima A i B . Slika 6.4. je površinski dijagram podataka iz tabele 6.2. Efekat interakcije u ovim podacima „okreće“ ravan, tako da postoji zakrivljenost u funkciji odziva. Faktorijalni eksperimenti su jedini način da se otkriju interakcije između promenljivih.



Slika 6.3. Trodimenzionalni površinski dijagram za podatke bez interakcije



Slika 6.4. Trodimenzionalni površinski dijagram za podatke sa interakcijom

6.1. Dvofaktorni eksperimenti

Najjednostavniji faktorski eksperiment obuhvata samo dva faktora, A i B . Postoji a nivoa faktora A i b nivoa faktora B . Ovaj dvofaktorni eksperiment je prikazan u tabeli 6.3. Eksperiment ima n ponavljanja i svako ponavljanje sadrži sve ab kombinacije tretmana.

Tabela 6.3. Dvofaktorni plan eksperimenta

Faktor B							
		1	2	...	b	Ukupno	Srednja vrednost
Faktor A	1	$y_{111}, y_{112},$ $..., y_{11n}$	$y_{121}, y_{122},$ $..., y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2},$ $..., y_{1bn}$	$y_{1..}$	$\bar{y}_{1..}$
	2	$y_{211}, y_{212},$ $..., y_{21n}$	$Y_{221}, y_{222},$ $..., y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2},$ $..., y_{2bn}$	$y_{2..}$	$\bar{y}_{2..}$
	...						
	a	$y_{a11}, y_{a12},$ $..., y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22},$ $..., y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2},$ $..., y_{abn}$	$y_{a..}$	$\bar{y}_{a..}$
Ukupno		$y_{.1.}$	$y_{.2.}$		$y_{.b.}$	$y_{...}$	
Srednja vrednost		$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$		$\bar{y}_{.b.}$		$\bar{y}_{...}$

Tabela 4.3. Dvofaktorni eksperiment

Opservacija u ij -toj ćeliji za k -to ponavljanje je označeno sa y_{ijk} . U obavljanju eksperimenta, abn opservacija će biti izvršena u slučajnom redu. Stoga, slično jednofaktornom eksperimentu, dvofaktorni eksperiment je kompletno randomiziranog dizajna.

Opservacije se mogu opisati preko linearnog statističkog modela, jednačina 6.1:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i=1, 2, \dots, a \\ j=1, 2, \dots, b, \\ k=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6.1)$$

gde je μ sveukupna srednja vrednost, τ_i je efekat i -tog nivoa faktora A , β_j je efekat j -tog nivoa faktora B , $(\tau\beta)_{ij}$ je efekat interakcije između A i B , i ε_{ijk} je komponenta slučajne greške koja ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednosti 0 i varijansom σ^2 . Testiraju se hipoteze o nepostojanju statističke značajnosti za faktor A , faktor B i interakcije AB . Analiza varijanse se koristiti za testiranje ovih

hipoteza. Pošto ovde postoje dva faktora u eksperimentu, test procedura se naziva i **dvofaktorna analiza varijanse**.

Ako se posmatra model fiksnih efekata, to znači da postoje tačno određeni nivoi faktora A i B i zaključci se mogu doneti samo za ove nivoe, i prikazaće se samo ANOVA tablica (tabela 6.4) koja je slična tablici 5.2. Ovde se takođe postavljaju sledeće hipoteze:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0 \quad \text{Faktor } A \text{ nije signifikantan}$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ za najmanje jedno}$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a = 0 \quad \text{Faktor } B \text{ nije signifikantan}$$

$$H_1: \beta_i \neq 0 \text{ za najmanje jedno}$$

$$H_0: (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \dots = (\tau\beta)_{1a} = 0 \quad \text{Nema interakcije}$$

$$H_1: (\tau\beta)_{1i} \neq 0 \text{ za najmanje jedno}$$

Tabela 6.4. ANOVA tablica dvo-faktornog eksperimenta

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F_0
A tretman	SS_A	$a-1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B tretman	SS_B	$b-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
Interakcija	SS_{AB}	$(a-1)-(b-1)$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)-(b-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
Greška	SS_E	$ab(n-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(n-1)}$	
Ukupno	SS_T	$abn-1$		

Primer 6.1: Osnovni premaz boje aviona se primenjuje na aluminijumske površine na dva načina: potapanje i prskanje. Svrha osnovne boje je da poboljša adheziju boje i neki delovi mogu biti premazani koristeći jednu ili drugu metodu. Procesna inženjerska grupa, odgovorna za ovu operaciju, se interesuje da li se tri različite osnovne boje razlikuju po svojim adhezionim osobinama. Faktorijalni eksperiment je definisan tako da istraži efekat tipa osnovne boje i primenjene metode na adheziju boje. Za svaku kombinaciju tipa osnovne boje i primenjene metode, tri uzorka su premazana, zatim je završno farbanje primenjeno i merena je adhezijska sila. Vrednosti izmerenih adhezionih sila su prikazane u tabeli 6.5.

Tabela 6.5. Vrednosti adhezije sile

Tip osnovne boje	Potapanje			Σ	Prskanje			Σ	$y_{i..}$
1	4	4.5	4.3	12.8	5.4	4.9	5.6	15.9	28.7
2	5.6	4.9	5.4	15.9	5.8	6.1	6.3	18.2	34.1
3	3.8	3.7	4.0	11.5	5.5	5	5	15.5	27
<i>y.j.</i>	40.2				49.6				89.8

U nastavku sledi prikaz analize varijanse za dati primer:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} = 4^2 + 4.5^2 + \dots + 5^2 - \frac{89.8^2}{18} = 10.72$$

$$SS_{tipovi} = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} = \frac{28.7^2 + 34.1^2 + 27^2}{6} - \frac{89.8^2}{18} = 4.58$$

$$SS_{metode} = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn} = \frac{40.2^2 + 49.6^2}{9} - \frac{89.8^2}{18} = 4.91$$

$$SS_{interakcija} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_{tipovi} - SS_{metode} =$$

$$= \frac{12.8^2 15.9^2 11.5^2 15.9^2 18.2^2 15.5^2}{3} - \frac{89.8^2}{18} - 4.58 - 4.91 = 0.24$$

$$SS_E = SS_T - SS_{tipovi} - SS_{metode} - SS_{interakcija} = 10.72 - 4.58 - 4.91 - 0.24 = 0.99$$

ANOVA je sumirana u tabeli 6.6. Odlučeno je da se koristi prag značajnosti $\alpha=0.05$. Pošto je $f_{0.05,2,12}=3.89$ i $f_{0.05,1,12}=4.75$ (tablične vrednosti iz F raspodele, prilog I) može se doneti zaključak da glavni efekti tip sredstva i primenjena metoda imaju efekta na adhezionu silu, a pošto je $1.5 < f_{0.05,2,12}$ ne postoji interakcija između ovih faktora.

Tabela 6.6. ANOVA tabela za primer 6.1

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F_0
Tip osnovne boje	4.58	2	2.29	28.63
Primenjena metoda	4.91	1	4.91	61.38
Interakcija	0.24	2	0.12	1.50
Greška	0.99	12	0.08	
Ukupno	10.72	17		

Dvofaktorni eksperiment u Minitabu

Unos podataka se vrši prema slici 6.5.

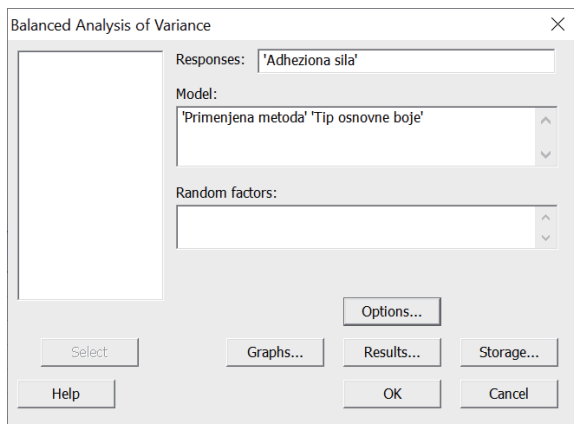
↓	C1-T	C2	C3
	Primenjena metoda	Tip osnovne boje	Adhezionna sila
1	Potapanje	1	4,0
2	Potapanje	1	4,5
3	Potapanje	1	4,3
4	Potapanje	2	5,6
5	Potapanje	2	4,0
6	Potapanje	2	5,4
7	Potapanje	3	3,8
8	Potapanje	3	3,7
9	Potapanje	3	4,0
10	Prskanje	1	5,4
11	Prskanje	1	4,9
12	Prskanje	1	5,6
13	Prskanje	2	5,8
14	Prskanje	2	6,1
15	Prskanje	2	6,3
16	Prskanje	3	5,5
17	Prskanje	3	5,0
18	Prskanje	3	5,0

Slika 6.5. Unos podataka iz primera 6.1 u Minitab

Za sprovođenje dvofaktornog eksperimenta ili dvo-faktorne ANOVE postupak je sledeći, slika 6.6:

1. **Stat > Balanced ANOVA**

2. U **Responses** se unese Adhezionna sila a u **Model** se unese **Primenjena metoda** i **Tip osnovne boje**



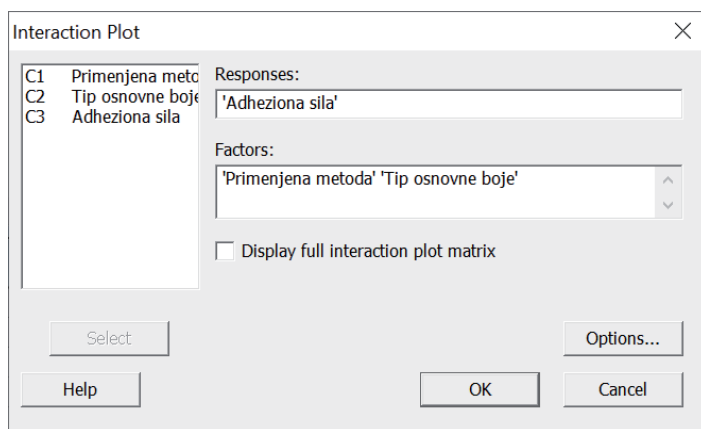
Slika 6.6. Postupak sprovođenja dvofaktornog eksperimenta

Rezultati dvofaktornog eksperimenta u Minitabu su prikazani na slici 6.7:

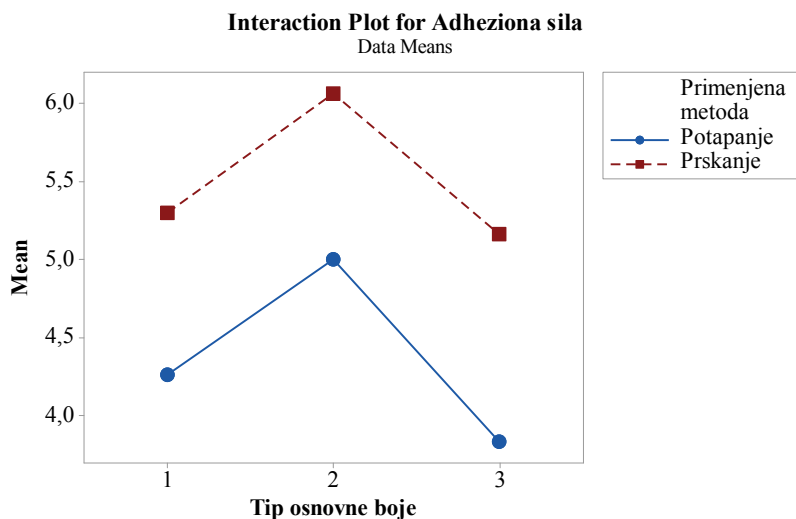
ANOVA: Adhezionna sila versus Primenjena metoda; Tip osnovne boje					
Factor	Type	Levels	Values		
Primenjena metoda	fixed	2	Potapanje; Prskanje		
Tip osnovne boje	fixed	3	1; 2; 3		
Analysis of Variance for Adhezionna sila					
Source	DF	SS	MS	F	p
Primenjena metoda	1	5,8939	5,8939	35,45	0,000
Tip osnovne boje	2	3,4211	1,7106	10,29	0,002
Error	14	2,3278	0,1663		
Total	17	11,6428			
S = 0,407762		R-Sq = 80,01 %		R-Sq(adj) = 75,72 %	

Slika 6.7. Rezultati dvofaktornog eskperimenta iz Minitaba

Ako se želi proveriti da li postoje interakcije među ispitivanim faktorima izabere se opcija **Stat > ANOVA > Interaction Plot** (slika 6.8).



Slika 6.8. Postupak kreiranja dijagrama interakcije



Slika 6.9. Dijagram interakcije

Dijagram interakcije je prikazan na slici 6.9. na osnovu kog se može zaključiti da ne postoji interakcija između dva faktora (linije se ne presecaju). Provera adekvatnosti modela preko reziduala se vrši na isti način kao kod jednofaktorne ANOVE.

6.2. Opšti faktorni eksperimenti

Mnogi eksperimenti uključuju više od dva faktora. Ovde se razmatra slučaj gde su a nivoi faktora A , b nivoi faktora B , c nivoi faktora C i tako dalje, uređeni u faktorni dizajn. Uopšteno govoreći, biće $abc...n$ ukupnih opservacija, ako postoji n ponavljanja kompletnog eksperimenta.

Na primer, ako se posmatra trofaktorno faktorijalni eksperiment sa osnovnim modelom, model je predstavljen jednačinom 6.2:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,a \\ j=1,2,\dots,b \\ k=1,2,\dots,c \\ l=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (6.2.)$$

Može se uočiti da ovaj model sadrži tri glavna efekta, tri dvofaktorne interakcije, jednu trofaktornu interakciju i grešku. Treba imati na umu da mora postojati najmanje dva ponavljanja ($n > 2$) za izračunavanje greške sume kvadrata. F test glavnih efekata i interakcija sledi direktno iz očekivanih srednjih kvadrata. Ovi odnosi prate F raspodele prema odgovarajućoj nultoj hipotezi. ANOVA tabela je dosta opširna i uglavnom se statistička analiza sprovodi u softverima.

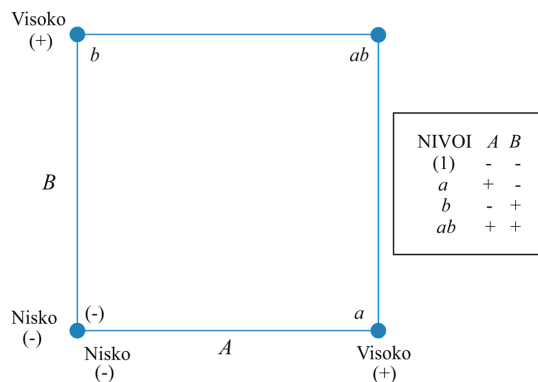
6.3. 2^k Faktorni dizajn

Faktorijalni dizajni su učestalo korišteni u eksperimentima uključujući nekoliko faktora gde je neophodno proučiti združene efekte faktora na izlaz. Nekoliko posebnih slučajeva opštih faktorijalnih dizajna su važni zato što su široko primenjeni u istraživačkom radu i zato što formiraju bazu drugih dizajna koji imaju znatnu praktičnu vrednost.

Najvažniji od ovih slučajeva su oni od k -faktora, svaki od po samo dva nivoa. Ovi nivoi mogu biti kvantitativni, kao što su dve vrednosti temperature, pritiska ili vremena, ili mogu biti kvalitativni, kao što su dve mašine, dva operatera, “visoki” i “niski” nivoi faktora ili možda prisustvo i odsustvo faktora. Kompletno ponavljanje takvog dizajna zahteva $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ opservaciju i nazvan je 2^k faktorijal dizajn. 2^k dizajn je naročito koristan u ranim stadijumima eksperimentalnog rada, kada se mnogi faktori ispituju. On pruža najmanji broj eksperimenata zbog kojih k faktor može biti proučavan tokom celog faktorijalnog dizajna. Pošto postoje samo dva nivoa za svaki faktor, pretpostavka je da je odziv aproksimalno linearan u opsegu odabranih nivoa faktora.

6.3.1. 2^2 dizajn

Najjednostavniji tip 2^k dizajna je 2^2 , a to je, dva faktora A i B svaki na dva nivoa. Ovi nivoi su obično niski i visoki nivoi faktora. 2^2 dizajn je prikazan na slici 6.10. Ovaj dizajn eksperimenta može se geometrijski prikazati kao kvadrat sa $2^2 = 4$ eksperimenata ili kombinacija tretmana, formirajući uglove kvadrata. U 2^2 dizajnu je uobičajeno označiti niske i visoke nivoe faktora A i B znacima $-$ i $+$. Ovo se ponekad zove geometrijski zapis dizajna.



Slika 6.10. 2^2 faktorni dizajn

Poseban zapis je korišten da označi kombinacije tretmana. Generalno, kombinacije tretmana su predstavljene preko malih slova. Ako je prisutno slovo, odgovarajući faktor je pokrenut na najvišem nivou u toj kombinaciji tretmana, a ako je slovo odsutno, faktor je pokrenut na svom nižem nivou. Na primer, kombinacija tretmana a indicira da je faktor A na visokom nivou, a da je faktor B na niskom nivou. Kombinacija tretmana sa oba faktora na niskom nivou je prezentovana preko (1). Ovaj zapis je korišten kroz 2^2 dizajn serije. Na primer, kombinacije tretmana u 2^4 sa A i C na visokom nivou i B i D na niskom nivou je označena sa ac .

Efekti od interesa u 2^2 dizajnu su glavni efekti A i B i dvofaktorna u interakciji AB . Neka oznake (1), a , b i ab takođe reprezentuju ukupno sve n opservacije uzete u ovim tačkama dizajna. Da bi se procenio glavni efekat faktora A srednja vrednost opservacije bi se usmerila ka desnoj strani kvadrata prikazanog na slici 6.10, gde je A na visokom nivou, te oduzeti srednju vrednost opservacije na levoj strani kvadrata, gde je A na niskom nivou, jednačina 6.3:

$$A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} = \frac{a+ab}{2n} - \frac{b+(1)}{2n} = \frac{1}{2n} [a+ab-b-(1)]. \quad (6.3)$$

Slično tome se određuje glavni efekat faktora B , jednačina 6.4:

$$B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} = \frac{b+ab}{2n} - \frac{a+(1)}{2n} = \frac{1}{2n} [b+ab-a-(1)] \quad (6.4.)$$

Interakcija AB se određuje računanjem razlike u dijagonalnim prosecima, jednačina 6.5:

$$AB = \frac{ab+(1)}{2n} - \frac{a+b}{2n} = \frac{1}{2n} [ab+(1)-a-b] \quad (6.5.)$$

Vrednosti u zagradama u jednačinama 6.3. 6.4. i 6.5. se nazivaju kontrasti. Na primer, A kontrast je $Kontrast_A = a + ab - b - (1)$. U ovim jednačinama, koeficijenti kontrasta su uvek ili +1 ili

-1. Tabela sa plus i minus znacima, kao što je tabela 6.7, može se koristiti da odredi znak svake kombinacije tretmana za određeni kontrast. Naslovi kolona u tabeli 6.7. su glavni efekti faktora A i B , interakcija AB i I predstavlja sumu. Naslovi redova su kombinacije tretmana. Treba napomenuti da su znaci u koloni AB proizvodi znakova iz kolona A i B .

Tabela 6.7. Znakovi za efekte u 2^2 dizajnu

Kombinacija tretmana	Efekat faktora			
	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Za generisanje kontrasta iz tabele, pomnože se znakovi u odgovarajućoj koloni tabele 6.7. prema kombinaciji tretmana kombinacije izlistane u redovima i onda se saberu. Na primer, $kontrast_{AB} = [(1)] + [-a] + [-b] + [ab] = ab + (1) - a - b$.

Kontrasti se koriste za proračun procene efekata i zbira kvadrata za A , B i AB interakciju. Jednačine (6.6.) za sume kvadrata su:

$$\begin{aligned}
 SS_A &= \frac{[a+ab-b-(1)]^2}{4n} \\
 SS_B &= \frac{[b+ab-a-(1)]^2}{4n} \\
 SS_{AB} &= \frac{[ab+(1)-a-b]^2}{4n}
 \end{aligned} \tag{6.6.}$$

Analiza varijacije se kompletira izračunavanjem ukupne sume kvadrata SS_T ($4n-1$ stepen slobode), i dobijanjem greške sume kvadrata SS_E [$4(n-1) \times$ stepen slobode] oduzimanjem.

Primer 6.2. Potrebno je ispitati uticaj dva faktora (vreme depozicije A i brzina protoka arsena B), svaki na dva nivoa, na debljinu (izražena u μm) sloja tokom izrade integrisanih kola koji se koriste u autoindustriji. Nivoi faktora za brzinu depozicije su kratko (-1) i dugo (1) i za brzinu protoka arsena 55 % (-1) i 59 % (1). U tabeli 6.8. je predstavljen 2^2 dizajn eksperimenta sa po četiri ponavljanja.

Tabela 6.8. Eksperimentalni rezultati 2^2 dizajna eksperimenta

Kombinacija tretmana	Dizajn faktora			Debljina (μm)					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>AB</i>	Debljina (μm)				Ukupno	Srednja vrednost
(1)	-	-	+	14.037	14.165	13.972	13.907	56.081	14.020
<i>a</i>	+	-	-	14.821	14.757	14.843	14.878	59.299	14.825
<i>b</i>	-	+	-	13.880	13.860	14.032	13.914	55.686	13.922
<i>ab</i>	+	+	+	14.888	14.921	14.415	14.932	59.156	14.789

Ukupan broj eksperimenata $N=2 \times 2 \times 4=16$.

Prvo je potrebno spovesti analizu varijanse, tj. sume kvadrata se računaju na sledeći način:

$$SS_A = \frac{[a+ab-b-(1)]^2}{4n} = \frac{[6,688]^2}{16} = 2,7956$$

$$SS_B = \frac{[b+ab-a-(1)]^2}{4n} = \frac{[-0,538]^2}{16} = 0,0181$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab+(1)-a-b]^2}{4n} = \frac{[0,252]^2}{16} = 0,004$$

$$SS_T = 14,037^2 + \dots + 14,932^2 - \frac{(56,081 + \dots + 59,156)^2}{16} = 3,0672$$

Analiza varijanse je prikazana u ANOVA tabeli 6.9. Može se zaključiti da vreme depozicije ima statističku značajnost na debljinu sloja dok brzina protoka arsena nema.

Tabela 6.9. ANOVA tabela za primer 6.1

Izvor varijacije	Suma kvadrata	Stepeni slobode	Sredina kvadrata	F_0
Vreme depozicije (<i>A</i>)	2,7956	1	2,7956	134,40
Brzina protoka arsena (<i>B</i>)	0,0181	1	0,0181	0,87
Interakcija (<i>AB</i>)	0,0040	1	0,0040	0,19
Greška	0,2495	12	0,0208	
Ukupno	3,0672	15		

Model za eksperimentalni dizajn 2^2 je prost linearni model oblika $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ iz razloga što faktor B nije statistički signifikantan. Konkretno za ovaj primer, primenom metode najmanjih kvadrata fitovani model ima sledeći oblik:

$$\hat{y} = 14,389 + \left(\frac{0,836}{2}\right) x_1,$$

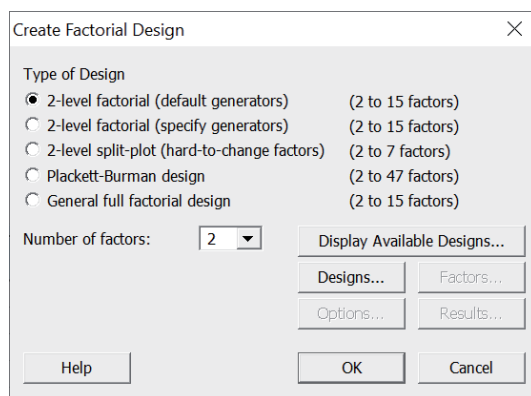
gde vrednost 14,389 predstavlja presek linearnog modela (2D linije) sa y -osom i računa se kao srednja vrednost svih 16 opservacija a $0,836/2$ predstavlja nagib tj. jedna polovina procene efekta vremena depozicije. Koeficijent regresije je jedna polovina procene efekta jer regresioni koeficijenti mere efekat jedinične promene u x_1 na srednju vrednost Y i procena efekta se zasniva na promeni od -1 do 1.

Ovaj model se može koristiti za dobijanje predviđenih vrednosti u četiri tačke koje formiraju uglove kvadrata u dizajnu. Na primer, ako se posmatra tačka sa nižom vrednosti vremena depozicije i nižom vrednosti brzine protoka arsena predviđena vrednost je:

$$\hat{y} = 14,389 + \left(\frac{0,836}{2}\right) (-1) = 13.971,$$

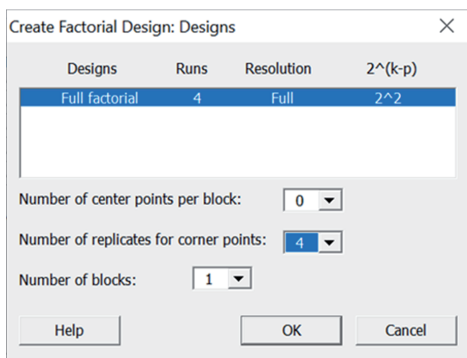
i rezidualni za četiri opservacije za ovu eksperimentalnu postavku se dobijaju određivanjem razlike između vrednosti opservacije i ove vrednosti, npr. $e_1 = 14.037 - 13.971 = 0.066$. U nastavku sledi postupak kreiranja dizajna i analiza rezultata u Minitabu.

Za postavljanje dizajna eksperimenta 2^2 u Minitab-u izabere se: **Stat > DoE > Factorial > Create Factorial Design**, izabere se **2-level factorial** i **number of factors** je 2, slika 6.11.

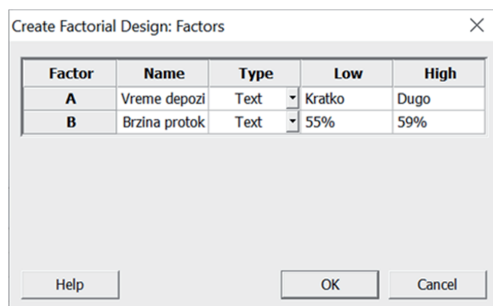


Slika 6.11. Kreiranje 2^2 dizajna eksperimenta u Minitabu

Zatim se aktivira opcija **Designs** i unese se broj 4 za **Number of replicates for corner point**, zatim **OK**, slika 6.12. Za definisanje nivoa faktora, tipa i naziva faktora aktivira se opcija **Factors** i popuni se prema slici 6.13, zatim **OK**.



Slika 6.12. Postavljanje broja ponavljanja u dizajnu eksperimenta



Slika 6.13. Definisane nivoa, tipa i naziva faktora

Minitab randomizuje redosled dizajna. Uređeni niz faktorskih kombinacija (eksperimentalnih uslova) se naziva „**run order**“. Obično je dobra ideja da se randomizuje red „**run order**“, kako bi se smanjili efekti faktora koji nisu uključeni u studiju, posebno efekti koji su vremenski zavisni. Međutim, mogu postojati situacije kada randomizacija dovodi do neželjenog „**run order**“-a. Na primer, u industrijskim aplikacijama, može biti teško ili skupo promeniti nivo faktora. Ili, nakon što su faktorski nivoi promenjeni, može potrajati dugo vremena da se sistem vrati u stabilno stanje. Pod ovim uslovima, možda se ne želi randomizovati dizajn kako bi se smanjili promene nivoa. Svaki put kada se kreira eksperimentalni dizajn, Minitab rezerviše i naziva C1 (**StdOrder**) i C2 (**RunOrder**) za skladištenje standardnog naloga i naloga za izvršavanje:

- **StdOrder** pokazuje koji bi redosled pokreta u eksperimentu bio ako bi se eksperiment uradio u standardnom redosledu - koji se takođe zove Jejtsov red (**Yates' order**).
- **RunOrder** pokazuje koji bi redosled pokreta u eksperimentu bio ako bi eksperiment bio pokrenut u slučajnom redosledu.
- Ako se eksperiment ne randomizuje, **RunOrder** i **StdOrder** su isti.

Ako se želi ponovo napraviti dizajn sa istim redosledom opservacija (to jest, isti redosled dizajna), može se izabrati baza za generator slučajnih podataka. Zatim, kada se želi ponovo napraviti dizajn, koristi se ista baza.

U cilju lakšeg unošenja podataka u **Options** isključiće se upotreba randomiziranog dizajna, slika 6.14, zatim dvaputa **OK**.

Create Factorial Designs: Options

Fold Design

☒ Do not fold

☐ Fold on all factors

☐ Fold just on factor:

Fraction

☐ Use principal fraction

☐ Use fraction number:

☐ Randomize runs

Base for random data generator:

☒ Store design in worksheet

Help OK Cancel

Slika 6.14. Opcija za isključenje randomiziranog eksperimenta

Izlaz iz Minitaba prikazan je na slici 6.15. Može se zaključiti da postoji 16 eksperimenata i da su kombinacije tretmana redom (1), a, b, ab prema tabeli 6.8.

Full Factorial Design

Factors: 2 Base Design: 2; 4
Runs: 16 Replicates: 4
Blocks: 1 Center pts (total): 0

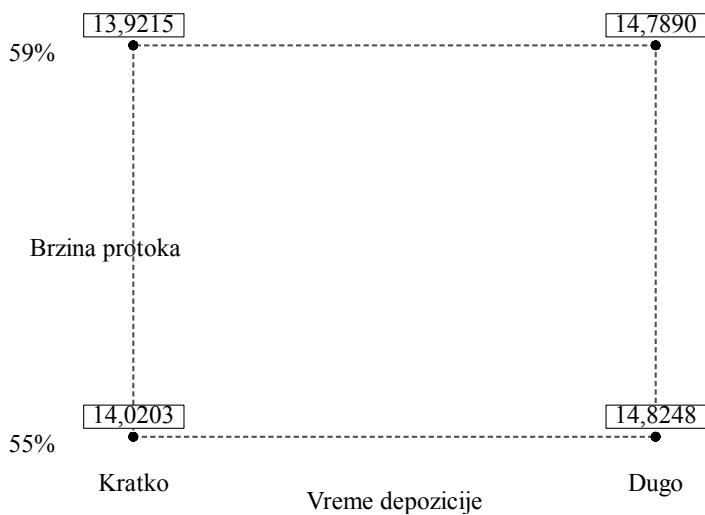
All terms are free from aliasing.

Worksheet 1 ***

	C1	C2	C3	C4	C5-T	C6-T
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Vreme depozicije	Brzina protoka
1	1	1	1	1	Kratko	55%
2	2	2	1	1	Dugo	55%
3	3	3	1	1	Kratko	59%
4	4	4	1	1	Dugo	59%
5	5	5	1	1	Kratko	55%
6	6	6	1	1	Dugo	55%
7	7	7	1	1	Kratko	59%
8	8	8	1	1	Dugo	59%
9	9	9	1	1	Kratko	55%
10	10	10	1	1	Dugo	55%
11	11	11	1	1	Kratko	59%
12	12	12	1	1	Dugo	59%
13	13	13	1	1	Kratko	55%
14	14	14	1	1	Dugo	55%
15	15	15	1	1	Kratko	59%
16	16	16	1	1	Dugo	59%

Slika 6.15. Izgled 2^2 dizajna eksperimenta u Minitabu

Nakon toga potrebno je u sledeću slobodnu kolonu uneti vrednosti odziva, tj. debljinu sloja vodeći računa da vrednosti odgovaraju kombinacijama nivoa faktora. U cilju kreiranja geometrijskog zapisa 2^2 dizajna eksperimenta koristi se opcija: **Stat > DoE > Factorial > Cube plot**, za **Response** unese se **Debljina**. Geometrijski zapis dizajna prikazan je na slici 6.16. U uglovima kvadrata su prikazane srednje vrednosti odgovarajućih kombinacija tretmana.



Slika 6.16. Geometrijski zapis 2^2 dizajna eksperimenta u Minitabu

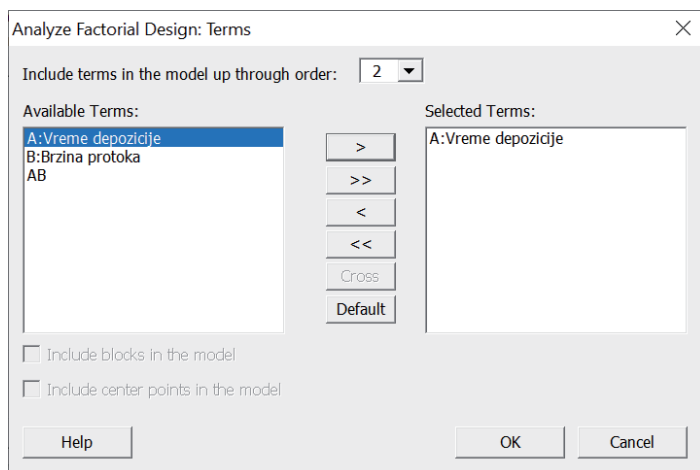
Za sprovođenje statističke analize izabere se **Stat > DoE > Factorial > Analyze factorial Design** u **Response** se unese debljina sloja. Zatim se aktivira opcija **Terms** izabere se 2 kod **Include terms in model up through order**. To znači da će se vršiti postavka modela koji će uključiti glavne efekte i njihove interakcije. Na slici je 6.17. je prikazana ANOVA tabela iz Minitaba. Može se uočiti da su ANOVA tablice dobijene računskim putem i Minitabom identične. Pošto je ustanovljeno da brzina protoka arsena i interakcija nemaju statističku značajnost postavlja se novi model koji će isključiti ova dva uticaja tako što će se u opciji **Terms** u **Selected Terms** izabrati samo vreme depozicije, slika 6.18.

Factorial Regression: Debljina versus Vreme depozicije; Brzina protoka

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	3	2,81764	0,93921	45,18	0,000
Linear	2	2,81367	1,40684	67,67	0,000
Vreme depozicije	1	2,79558	2,79558	134,47	0,000
Brzina protoka	1	0,01809	0,01809	0,87	0,369
2-Way Interactions	1	0,00397	0,00397	0,19	0,670
Vreme depozicije*Brzina protoka	1	0,00397	0,00397	0,19	0,670
Error	12	0,24948	0,02079		
Total	15	3,06712			

Slika 6.17. ANOVA tabela iz Minitaba za primer 6.2



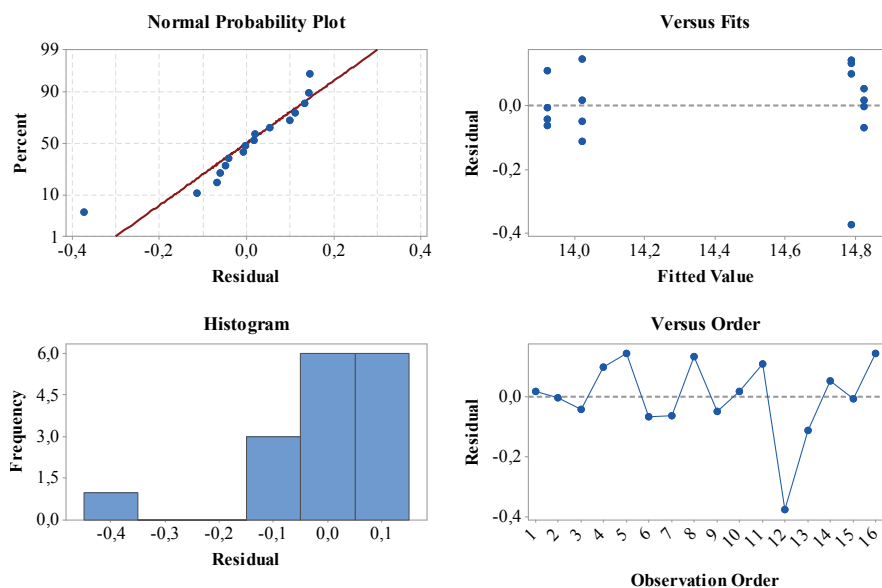
Slika 6.18. Izbor faktora i interakcija koji učestvuju u modelu

Dobija se model koji se poklapa sa gore proračunatim, slika 6.19. Pored toga Minitab daje i vrednosti koeficijenata determinacije koji su takođe dati na slici 6.19. Takođe, u Minitabu se mogu kreirati dijagrami reziduala, dijagrami glavnih efekata i dijagram interakcije (u ovom slučaju potrebno je uključiti sve efekte u model).

Model Summary						
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)			
0,139268	91,15 %	90,51 %	88,44 %			
Coded Coefficients						
Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	p-Value	VIF
Constant		14,3889	0,0348	413,27	0,000	
Vreme depozicije	0,8360	0,4180	0,0348	12,01	0,000	1.00
Regression Equation in Uncoded Units						
Debljina sloja=14,3889+0,4180×Vreme depoziciji						

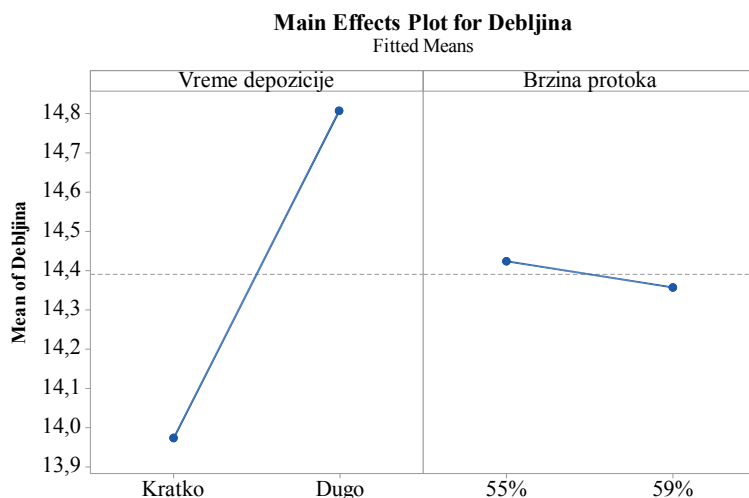
Slika 6.19. Izlaz iz Minitaba koji pokazuje jednačinu modela

Za kreiranje dijagrama reziduala koristi se opcija **Stat > DoE > Factorial > Analyze factorial Design** i u **Graphs** se aktivira **Four in one**, dijagram je prikazan na slici 6.20. Može se uočiti da je najveći rezidual na opservaciji 12 i iznosi -0.392.

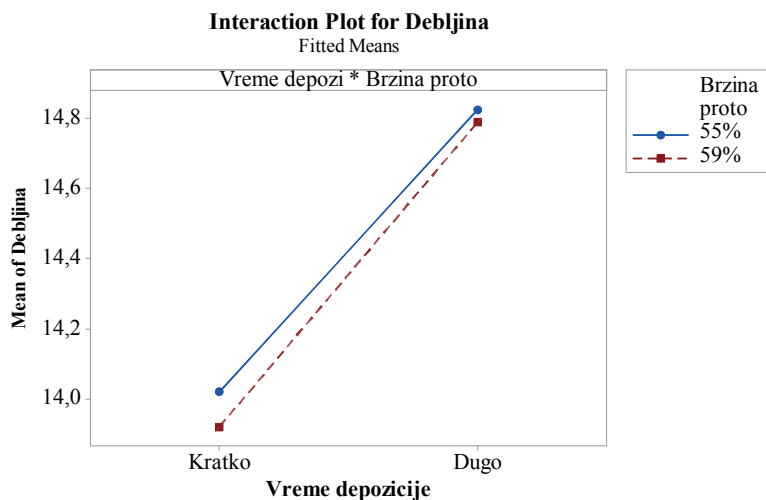


Slika 6.20. Dijagram reziduala za primer 6.2

Ako se žele prikazati dijagrami glavnih efekata i interakcije koristi se opcija **Stat > DoE > Factorial > Factorial Plot** i u **Graphs** se izabere **Main effects plot** i **Interaction plot (Display lower left matrix)**, slike 6.21. i 6.22. Sa slike 6.21. se takođe može uočiti jak uticaj faktora „vreme depozicije“, a sa povećanjem vremena raste i vrednost debljine sloja. Slab uticaj faktora „brzina protoka arsena“ se može videti na istoj slici tako što se debljina sloja naznatno smanjuje povećanjem brzine protoka arsena. Sa slike 6.22. se može uočiti da između faktora ne postoji interakcija.



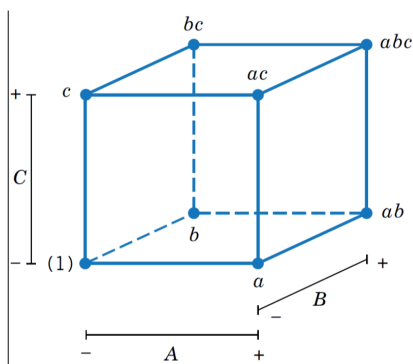
Slika 6.21. Dijagram glavnih efekata za primer 6.2



Slika 6.22. Dijagram interakcije za primer 6.2.

6.3.2. 2^k Faktorni dizajn za $k \geq 3$

Metode predstavljene za faktorni dizajn sa $k=2$ faktora svaki na dva nivoa mogu se lako proširiti na dizajne sa više od dva faktora. Na primer, ako se posmatraju $k=3$ faktora, svaki na dva nivoa, ovo je 2^3 faktorni dizajn, i ima osam opservacija ili kombinacija tretmana ($2 \times 2 \times 2 = 8$). Geometrijski, dizajn je kocka prikazana na slici 6.23, sa osam eksperimentalnih tačaka formiranih u uglovima kocke. Slika 6.24. prikazuje listu svakog eksperimenta u tabeli, sa svakim redom koji reprezentuje jednu opservaciju za koje su postavljena oznake $-$ i $+$, koje ukazuje na niži i viši nivo za svaki od tri faktora. Ova tabela se ponekad naziva matrica dizajna. Ovaj dizajn dozvoljava da se procene tri glavna efekta (A , B , i C), tri dvofaktorne interakcije (AB , AC i BC) i jedna trofaktorna interakcija (ABC).

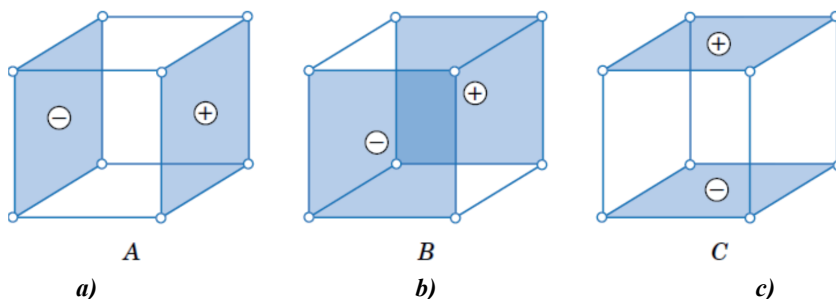


Slika 6.23. Geometrijski izgled 2^3 dizajna eksperimenta

Eksperimentalna tačka	A	B	C
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Slika 6.24. Matrica 2^3 dizajna eksperimenta

Glavni efekti slično se procenjuju kao kod 2^2 dizajna. Npr., glavni efekat faktora A se procenjuje kao srednja vrednost četiri kombinacije tretmana na desnoj strani kocke, gde je A na visokom nivou, minus srednja vrednost četiri kombinacije tretmana na levoj strani kocke gde je A na niskom nivou, slika 6.25.a.



Slika 6.25. Grafički prikaz glavnih efekata a) faktor A ; b) faktor B , c) faktor C

Glavni efekat faktora A je dat jednačinom 6.7:

$$A = \bar{y}_A + \bar{y}_A = \frac{a+ab+ac+abc}{4n} - \frac{(1)+b+c+bc}{4n} = \frac{1}{4n} [a+ab+ac+abc-(1)-b-c-bc] \quad (6.7.)$$

Na isti način se mogu odrediti glavni efekti faktora B i C , slika 6.25.b i slika 6.25.c. Dvofaktorne interakcije se određuju dosta lako, npr AB interakcija, je razlika srednje vrednosti A efekta na dva nivoa faktora B .

Faktor B	Srednja vrednost efekta A faktora
Visok nivo (+)	$\frac{[(abc-bc)+(ab-b)]}{2n}$
Nizak Nivo (-)	$\frac{[(ac-c)+(a-(1))]}{2n}$
Razlika	$\frac{[abc-bc+ab-b-ac+c-a+(1)]}{2n}$

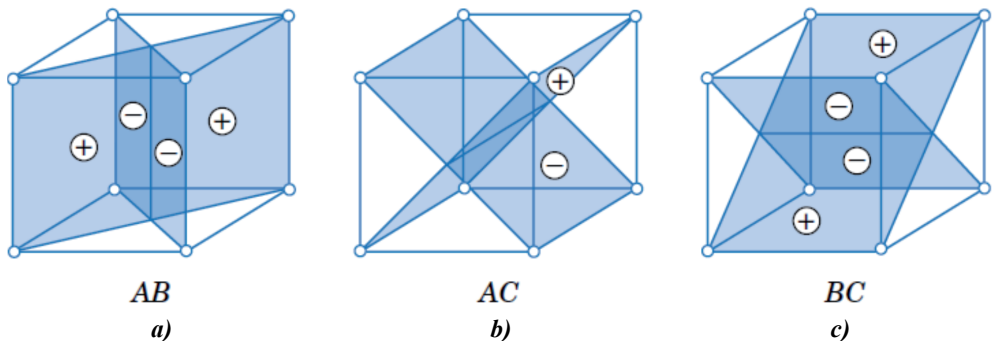
Interakcija AB je polovina razlike, jednačina 6.8.

$$AB = \frac{1}{4n} [abc-bc+ab-b-ac+c-a+(1)] \quad (6.8.)$$

Na slici 6.26.a prikazana je interakcija AB kao razlika u srednjim vrednostima u eksperimentalnim tačkama na dve dijagonalne ravni kocki. Na isti način se nalaze i interakcije AC i BC , jednačine 6.9. i 6.10. Takođe, ove interakcije su prikazane na slikama 6.26.b i 6.26.c.

$$AC = \frac{1}{4n} [(1)-a+b-ab-c+ac-bc+abc] \quad (6.9.)$$

$$BC = \frac{1}{4n} [(1)+a-b-ab-c-ac+bc+abc] \quad (6.10.)$$



Slika 6.26. Grafički prikaz dvostrukih interakcija a) AB interakcija; b) AC interakcija; c) BC interakcija

Trofaktorna interakcija ABC se definiše kao srednja vrednost razlike između interakcije AB za dva različita nivoa C, jednačina 6.11.

$$ABC = \frac{1}{4n} [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)] \quad (6.11.)$$

Slično 2^2 dizajnu eksperimenta, može se predstaviti tabela znakova za izračunavanje efekata, tabela 6.10. Procena bilo kog glavnog efekta ili interakcije u 2^3 dizajnu eksperimenta se određuje množenjem kombinacije tretmana u prvoj koloni tabele sa znacima u odgovarajućoj koloni glavnog efekta ili interakcije, dodavanjem rezultata da bi se dobio kontrast, a zatim deljenjem kontrasta sa jednom polovinom ukupnog broja opservacija u eksperimentu. Za bilo koji 2^3 dizajn sa n ponavljanja procena efekta se računa prema jednačini 6.12.

$$\text{efekat} = \frac{\text{kontrast}}{n2^{k-1}}, \quad (6.12)$$

a suma kvadrata za svaki efekat se dobija koristeći jednačinu 6.13.

$$SS = \frac{(\text{kontrast})^2}{n2^k}, \quad (6.13)$$

Tabela 6.10. Znakovi za efekte u 2^3 dizajnu

Kombinacija tretmana	Efekat faktora							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

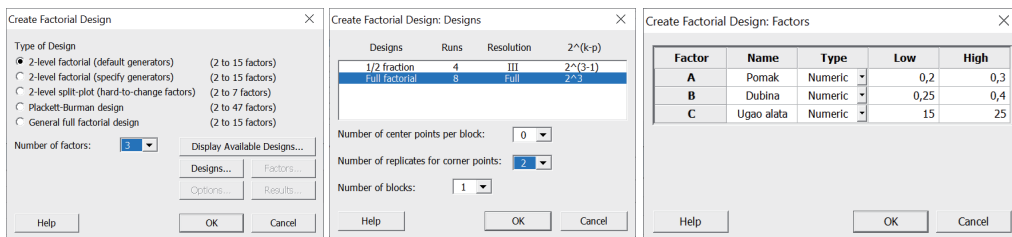
Primer 2³ dizajna eksperimenta

Primer 6.3: Mašinski inženjer proučava kvalitet obrađene površine merenjem površinske hrapavosti R_a tokom mašinske obrade rezanjem. Tri faktora, pomak (A), dubina rezanja (B) i ugao alata (C) su uzeti u razmatranje. Svaki od tri faktora je razmatran na dva nivoa: pomak (0.2 mm/s (-); 0.3 mm/s (+)), dubina rezanja (0.25 mm (-); 0.4 mm (+) i ugao alata (15 ° (-); 25 ° (+)). Svaka eksperimentalna tačka je imala po dva ponavljanja. Rezultati srednje aritmetičke hrapavosti R_a su prikazani u tabeli 6.11.

Tabela 6.11. Rezultati R_a za primer 6.3.

Pomak (A)	Dubina (B)			
	0,25 mm		0,4 mm	
	Ugao alata (C)		Ugao alata (C)	
	15°	25°	15°	25°
0,2 mm	9	11	9	10
	7	10	11	8
0,3 mm	10	10	12	16
	12	13	15	14

Postavka eksperimentalnog dizajna kao i statistička analiza biće prikazane u Minitabu. Kreiranje eksperimenta se vrši slično kao i kod 2² eksperimenta s tim što se za broj faktora uzima 3, a broj ponavljanja je 2, slika 6.27. Takođe je potrebno isključiti opciju da eksperiment bude randomiziran u cilju lakšeg unošenja zavisne promenljive, slika 6.13.



Slika 6.27. Kreiranje 2³ dizajna eksperimenta u Minitabu

Kreirani dizajn eksperimenta sa unesenim odgovarajućim odzivima dat je na slici 6.28.

Full Factorial Design

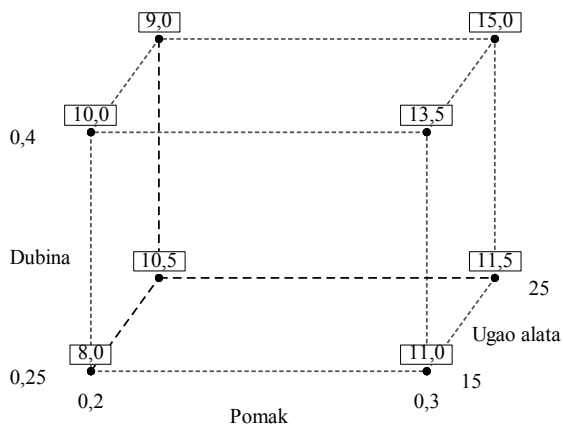
Factors: 3 Base Design: 3; 8
 Runs: 16 Replicates: 2
 Blocks: 1 Center pts (total): 0

Worksheet 1 ***

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Pomak	Dubina	Ugao alata	Hrapavost Ra
1	1	1	1	1	0,2	0,25	15	9
2	2	2	1	1	0,3	0,25	15	10
3	3	3	1	1	0,2	0,40	15	9
4	4	4	1	1	0,3	0,40	15	12
5	5	5	1	1	0,2	0,25	25	11
6	6	6	1	1	0,3	0,25	25	10
7	7	7	1	1	0,2	0,40	25	10
8	8	8	1	1	0,3	0,40	25	16
9	9	9	1	1	0,2	0,25	15	7
10	10	10	1	1	0,3	0,25	15	12
11	11	11	1	1	0,2	0,40	15	11
12	12	12	1	1	0,3	0,40	15	15
13	13	13	1	1	0,2	0,25	25	10
14	14	14	1	1	0,3	0,25	25	13
15	15	15	1	1	0,2	0,40	25	8
16	16	16	1	1	0,3	0,40	25	14

Slika 6.28. Izgled 2^3 dizajna eksperimenta u Minitabu

Geometrijski zapis dizajna prikazan je na slici 6.29. U uglovima kocke su prikazane srednje vrednosti odgovarajućih kombinacija tretmana.

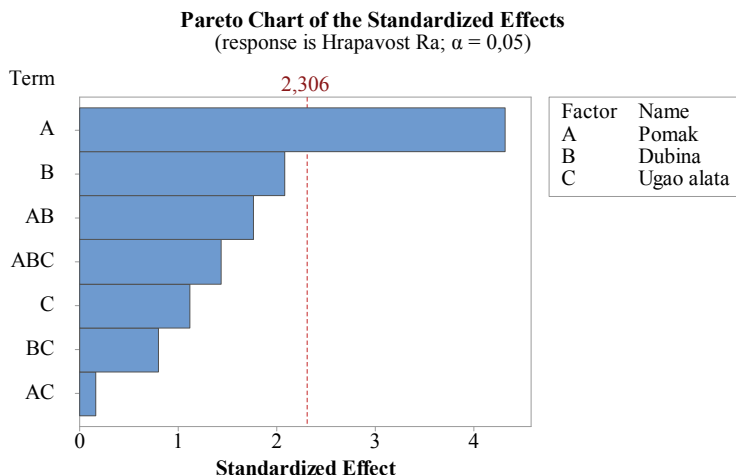


Slika 6.29. Geometrijski zapis 2^3 dizajna eksperimenta u Minitabu

Na slici 6.30. je prikazana statistička analiza (ANOVA tabela); u model su uključeni glavni efekti i sve interakcije. Iz ANOVE (na osnovu p vrednosti) može se zaključiti da jedino pomak ($p < \alpha$) ima statističku signifikantnost na hrapavost obrađene površine. Ova tvrdnja se može uočiti i iz Pareto dijagrama koji se takođe dobija iz Minitaba (u prethodnom primeru nije prikazan), slika 6.31.

Factorial Regression: Hrapavost Ra versus Pomak; Dubina; Ugao alata					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	7	73,4375	10,4911	4,30	0,029
Linear	3	59,1875	19,7292	8,09	0,008
Pomak	1	45,5625	45,5625	18,69	0,003
Dubina	1	10,5625	10,5625	4,33	0,071
Ugao alata	1	3,0625	3,0625	1,26	0,295
2-Way Interactions	3	9,1875	3,0625	1,26	0,352
Pomak*Dubina	1	7,5625	7,5625	3,10	0,116
Pomak*Ugao alata	1	0,0625	0,0625	0,03	0,877
Dubina*Ugao alata		1,5625	1,5625	0,64	0,446
3-Way Interactions	1	5,0625	5,0625	2,08	0,188
Pomak*Dubina*Ugao alata	1	5,0625	5,0625	2,08	0,188
Error	8	19,5000	2,4375		
Total	15	92,9375			

Slika 6.30. ANOVA tabela iz Minitaba za primer 6.3



Slika 6.31. *Signifikantnost/nesignifikantnost faktora i interakcija prikazanih kroz Pareto dijagram*

Pored ANOVA tabele Minitab kao izlaz daje jednačinu modela, adekvatnost modela i analizu reziduala, slika 6.32. Sa slike se može uočiti jednačina linearnog modela koja opisuje ukupno 79 % eksperimentalnih uslova. Takođe treba napomenuti da vrednosti t statistike predstavljaju kvadratni koren od F statistike. Dijagrami glavnih efekata i interakcije se dobijaju na isti način kao i kod 2^2 dizajna eksperimenta.

Treba napomenuti da broj faktora u eksperimentu može biti neograničen i da ne mora broj nivoa biti 2. Takođe, postoje dizajni eksperimenta koji imaju različite nivoe razmatranih faktora i ovo je čest slučaj u praksi. Za kreiranje takvih eksperimentalnih dizajna koristi se opcija **General full factorial desing**, slika 6.11. Takođe, kada je nemoguće izvesti sve eksperimente pod istim uslovima tada je potrebno staviti eksperimente u blokove. Primer eksperimentalnog dizajna u blokovima biće prikazan u delu odzivne površine.

Model Summary						
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)			
1,56125	79,02 %	60,66 %	16,07 %			
Coded Coefficients						
Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	p-Value	VIF
Constant		11,063	0,390	28,34	0,000	
Pomak	3,375	1,688	0,390	4,32		1,00
Dubina	1,625	0,813	0,390	2,08	0,071	1,00
Ugao alata	0,875	0,438	0,390	1,12	0,295	1,00
Pomak*Dubina	1,375	0,688	0,390	1,76	0,116	1,00
Pomak*Ugao alata	0,125	-0,313	0,390	0,16	0,877	1,00
Dubina*Ugao alata	-0,625	-0,313	0,390	-0,80	0,446	1,00
Pomak*Dubina*Ugao alata	1,125	0,562	0,390	1,44	0,188	1,00
Regression Equation in Uncoded Units						
Hrapavost Ra = -40,7 +164×Pomak + 132×Dubina +2,73×Ugao alata − 417×Pomak*Dubina - 9,50×Pomak*Ugao alata - 8,33×Dubina*Ugao alata + 30,0×Pomak*Dubina*Ugao alata						

Slika 6.32. Jednačina linearnog modela i adekvatnost modela (koeficijent determinacije)

6.4. Metod odzivne površine

Jedna od najvažnijih vrsta istovremenog dizajna je metoda odzivne površine (*eng. Response surface methodology, RSM*) i spada u posebnu grupu dizajna eksperimenta. Odziv (rezultat eksperimenta) je merljiva veličina kvaliteta proizvoda ili procesa. Kada se jednom ustanovi zakonitost ili odnos nezavisnih varijabli preko matematičkog oblika (odzivne funkcije), takav oblik opisa pojave može poslužiti za donošenje konkretnih zaključaka o prirodi pojave. U prošlom veku, RSM se razvijao na području eksperimenata vezanih za istraživanje procesa u hemijskoj industriji, nakon čega se upotreba proširila i na ostala područja industrijskih i naučno-istraživačkih područja, posebno u područjima razvoja novih materijala i postupaka. Stoga se može zaključiti da je metoda odzivne površine postala jedan od osnovnih alata u planiranju i analizi eksperimenta.

Danas je nezamislivo planiranje eksperimenta bez upotrebe savremenih programskih paketa koji se bave područjem planiranja i analize eksperimenta, a sadrže tehnike planiranja i optimizacije koje su bazirane na metodologiji odzivne površine. Ova metoda može se definisati kao empirijska statistička tehnika primenjena za regresionu analizu podataka dobijenih iz adekvatno planiranih eksperimenata simultanim rešavanjem sistema jednačina. Svaka od jednačina naziva se funkcija odziva, a njen geometrijski prikaz se naziva odzivna površina, koja se može prikazati u tri dimenzije ili kao konturne površine, u dve dimenzije. Osnovna ideja metode odzivne površine jeste dobiti odnos uticajnih (nezavisnih) faktora na zavisnu promenljivu (odziv) kroz odzivnu funkciju.

Odzivne funkcije su polinomskog oblika s obzirom na to što se kvalitet fitovanja eksperimentalnih podataka može poboljšati povećanjem stepena polinoma. Ovakvi modeli su posebno pogodni za rešavanje optimizacionih problema, jer je njima moguće opisati interakcije velikog broja faktora, a procena kvaliteta fitovanja polinomskih modela se može lako odrediti. Takođe je moguće razlučiti efekte pojedinih članova modela, kao glavne efekte i/ili interakcije. Metoda odzivne površine koristi se za ispitivanje odnosa između jedne ili više zavisnih promenljivih i skupa kvantitativnih eksperimentalnih promenljivih ili faktora. Ova metoda se često koristi nakon indentifikovanja faktora koji se mogu kontrolisati, a pri čemu se želi doći do faktorske postavke koja optimizuje odziv. Dizajn ove vrste obično se bira kada se očekuje zakrivljena odziva površina. Metoda odzivne površine može se primeniti za:

- pronalaženje postavke faktora (uslova rada) koji proizvode "najbolji" odgovor
- pronalaženje postavke faktora koja zadovoljava specifikacije za rad ili proces
- identifikovanje novih uslova rada koji proizvode dokazano poboljšanje kvaliteta proizvoda u odnosu na kvalitet koji se postiže trenutnim uslovima
- modeliranje odnosa između kvantitativnih faktora i odziva

Mnoge primene odzivne površine su po prirodi sekvencijalne jer one zahtevaju više od jedne faze eksperimenta i analize. Prilikom izbora dizajna potrebno je:

- identifikovati broj faktora koji su od interesa
- utvrditi broj radnji koje se mogu izvršiti
- osigurati adekvatno pokrivanje područja od interesa na odzivnoj površini. Trebao bi se izabrati dizajn koji će adekvatno predvideti vrednosti u oblasti od interesa
- utvrditi uticaj koji drugi uslovi (kao što su troškovi, vreme ili dostupnost objekata) imaju po izbor dizajna

U zavisnosti od problema, postoje i drugi razlozi koji čine dizajn poželjnim. Mora se izabrati dizajn koji pokazuje dosledne performanse u kriterijumima koji se smatraju važnim, kao što su sposobnost da se:

- utvrdi broj radnji koji se može izvršiti
- povećava red dizajna sekvencijalno
- izvođenje eksperimenta u ortogonalnim blokovima. Orthogonalni blok dizajn omogućava nezavisno procenjivanje modela i blok efekata i minimiziranje varijacije u procenjenim koeficijentima,
- rotiranje dizajna. Rotirajuće konstrukcije pružaju poželjnu osobinu konstantnog predviđanja varijacije na svim tačkama koje su jednako udaljene od dizajniranog centra, čime se poboljšava kvalitet predviđanja
- detektuje nedostatke podešavanja modela

Optimizovanje procesnih uslova podrazumeva poboljšanje svojstava nekog sistema, procesa ili proizvoda uz postizanje maksimalnog prinosa uz što manje troškove. Ranije se optimizovanje procesa sprovodilo na način da se ispita uticaj jedne promenljive na izlaznu veličinu, odnosno na odziv procesa. Takva tehnika se zove „jedna promenljiva u vremenu“. Primenom navedene tehnike ne može se dobiti podatak o međusobnom uticaju drugih nezavisnih promenljivih u procesu na izlaznu veličinu, dok bi samo optimizovanje takvog procesa zahtevalo veliki broj eksperimenata, veliki utrošak materijala, što sveukupno utiče na cenu procesa/proizvoda. U novije vreme, za optimizovanje procesa se koriste multivarijantne tehnike kao što je metoda odzivnih površina. Provođenjem prethodno definisanih eksperimenata određuje se međusobni uticaj ulaznih promenljivih na odziv procesa, odnosno na izlaznu promenljivu.

6.4.1. Matematički model metode odzivne površine

Metoda odzivnih površina predstavlja skup matematičkih i statističkih alata koji se primjenjuju u svrhu modeliranja i optimizovanja određenih procesnih uslova u svrhu dobijanja odgovarajućeg odziva kao funkcije ulaznih nezavisnih promenljivih, prikazano jednačinom 6.14.

$$y=f(x_1,x_2)+\varepsilon, \quad (6.14.)$$

gde su x_1 i x_2 promenljive koje utiču na proces a ε je komponenta greške. U principu izraz predstavlja regresioni model iz trećeg poglavlja.

Prilikom definisanja odziva, funkcija f je nepoznata zbog međusobnog uticaja nezavisnih promenljivih na odziv, što predstavlja glavni problem metode odzivnih površina. Kako bih se definisao odgovarajući model potrebno je provesti odgovarajuću aproksimaciju eksperimentalnih podataka u funkciju f . U početnim fazama istraživanja, naučnici najčešće koriste polinome nižeg stepena u uskom području ispitivanja. Ukoliko se odziv može definisati kao linearna funkcija nezavisnih varijabli, tada je aproksimacija funkcija modela prvog reda. Model prvog reda sa dve nezavisne varijable može se definisati jednačinom 6.15.

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon. \quad (6.15.)$$

Ukoliko prilikom linearne aproksimacije eksperimentalnih podataka funkcije f sa dve nezavisne promenljive dolazi do velike statističke greške, tada se primenjuje model drugog reda, jednačina 6.16:

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_{11}x_1^2+\beta_{22}x_2^2+\beta_{12}x_1x_2+\varepsilon, \quad (6.16.)$$

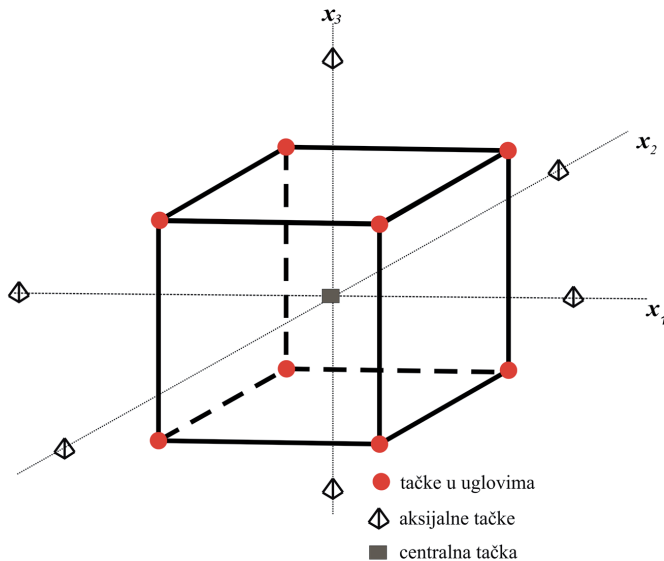
Kod svakog modela, nivo pojedinog faktora (promenljive) je nezavisna u odnosu na nivo drugih faktora. U nastojanju da se dobije statistički značajan model prilikom aproksimacije eksperimentalnih podataka modelom višeg reda (polinom) sa što manjom statističkom greškom modela potrebno je definisati plan (matricu) eksperimenata u nastojanju da se prikupi što je više moguće značajnih eksperimentalnih podataka. Nakon provedenih eksperimenata primjenjuje se model najmanjih kvadrata u svrhu procene parametara polinoma.

Odnos između odziva y i nezavisnih promenljivih često je nepoznat. Model koji definiše odziv funkcije f je polinom nižeg stepena, koji se često primenjuje za aproksimaciju podataka ukoliko je ispitivano područje podataka malo. Prilikom aproksimacije funkcije f model prvog stepena se primenjuje kad se odziv nezavisnih varijabli može opisati linearnom funkcijom. Međutim, u većini slučajeva odziv modela se ne može opisati linearnom funkcijom zbog velikog nedostatka modela (*eng. lack of fit of the first-order model*). Model drugog reda bolje aproksimira eksperimentalne podatke parabolom. Model drugog reda osim kvadratnih članova, obuhvata sve članove modela prvog

reda. Prilikom definisanja modela drugog reda, najčešće su primenjuju Centralno kompozitni dizajn i Box-Behnken dizajn.

6.4.2. Centralni kompozitni dizajn

Ako su proučavani faktori u eksperimentu zaista oni koji utiču na proces, a podaci dobijeni eksperimentom prihvatljive tačnosti, tada je moguće razviti model koji verodostojno opisuje proces. Razvojem, tj. dodavanjem centralnog stanja eksperimenta jednako udaljenih od centralne tačke (aksijalnih tačaka) na postojeći faktorski plan eksperimenta na dva nivoa formira se centralno kompozitni plan eksperimenta. Stoga, centralno kompozitni plan eksperimenta je model prvog reda ($2k$) proširen dodatnim tačkama (stanjima eksperimenta) u centru i tačkama u osama da bi se omogućila procena parametara modela drugog reda. Centralno kompozitni plan eksperimenta sastoji se od $2k$ stanja u vrhovima (faktorska stanja), $2k$ stanja u osama i stanja u središtu (k – broj faktora). Centralna tačka daje informaciju o nelinearnosti u odzivu dok aksijalne tačke daju mogućnost efikasne procene parametara drugog reda. Ukupno gledajući, svaki faktor se varira na pet nivoa. Za $k = 3$ (faktori su x_1, x_2, x_3) na slici 6.33. prikazan je model centralnog kompozitnog eksperimenta.



Slika 6.33. Centralno kompozitni plan eksperimenta za tri faktora

Ukupni broj eksperimenata u centralno kompozitnom planu se računa prema jednačini 6.17:

$$N = 2^k + 2k + n_c, \quad (6.17.)$$

pri čemu je n_c broj ponavljanja u centralnoj tački. Izbor vrednosti α i n_c određuje karakteristiku plana, odnosno njegovu ortogonalnost i rotabilnost, što zavisi od broja faktora i broja ponavljanja istih uslova. Eksperiment je ortogonalan ako je zbir produkata kodiranih stanja bilo koje dve kolone u

matrici eksperimenta jednak nuli. Rotabilnost centralno kompozitnog plana eksperimenta postiže se dodavanjem stanja eksperimenta tako da su sva stanja jednako udaljena od središta eksperimenta, odnosno rotabilnost zavisi o tzv. osnoj udaljenosti α (udaljenosti stanja u osama od centra).

Eksperiment je rotabilan ako je zadovoljen uslov definisan jednačinom 6.18:

$$\alpha = \sqrt{F}, \quad (6.18.)$$

gde je F broj faktorskih stanja, tj. $F=2k$. Prema tome, u slučaju dva faktora $\alpha=1.414$ a u slučaju tri faktora $\alpha=1.682$.

U tabeli 6.12. dat skraćeni centralni kompozitni plan.

Tabela 6.12. *Skraćeni centralni kompozitni plan*

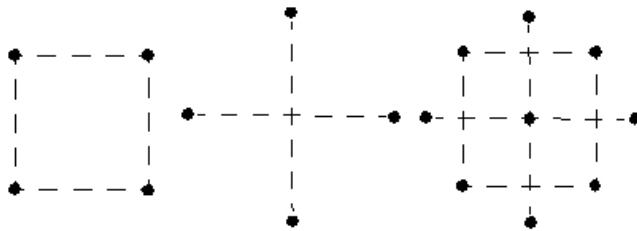
Broj fak.	Ukupno eksp.	Ukupno blokova	Blokovi u kubu	Broj eksp. u redu	Ukupno centralnih tačaka	Kubne centralne tačke	Aksijalne centralne tačke	α	Ortogonalni blokovi	Rotabilnost
2	13	--	--	4	5	--	--	1.41	--	y
	14	2	1	4	6	3	3	1.44	y	y
3	20	--	--	8	6	--	--	1.68	--	y
	20	2	1	8	6	4	2	1.63	y	n
	20	3	2	8	6	4	2	1.63	y	n
4	31	--	--	16	7	--	--	2.00	--	y
	30	2	1	16	6	4	2	2.00	y	y
	30	3	2	16	6	4	2	2.00	y	y
5 pola	32	--	--	16	6	--	--	2.00	--	y
	33	2	1	16	7	6	1	2.00	y	y
5	52	--	--	32	10	--	--	2.37	--	y
	54	2	1	32	12	8	4	2.36	y	n
	54	3	2	32	12	8	4	2.36	y	n
6 pola	53	--	--	32	9	--	--	2.37	--	y
	54	2	1	32	10	8	2	2.36	y	n
	54	3	2	32	10	8	2	2.36	y	n
6	90	--	--	64	14	--	--	2.82	--	y
	90	2	1	64	14	8	6	2.82	y	y

Kreiranje centralnog kompozitnog dizajna

Mogu se kreirati blokirani ili deblokirani centralni kompozitni dizajni. Centralni kompozitni dizajn se sastoji od:

- 2^k faktorijalne ili "kocke" tačaka, gde je k broj faktora,
- aksijalnih tačaka (takođe zvane zvezde),
- centralne tačke.

U nastavku je prikazan centralni kompozitni dizajn sa dva faktora. Tačke na slici 6.34. predstavljaju eksperimentalne nizove koji se izводе.



Slika 6.34. Eksperimentalni nizovi kod centralnog kompozitnog plana dizajna

Centralni kompozitni dizajn se često preporučuje kada plan dizajna zahteva sekvencijalno eksperimentisanje, jer ovaj dizajn može uključiti informacije iz pravilno planiranog faktorskog eksperimenta. Faktorski ili „kockasti“ deo i središnje tačke mogu poslužiti kao preliminarna faza u kojoj se može podešavati (fitovati) model prvog reda (linearni), ili pak pružaju dokazi o važnosti doprinosa ili krive drugog reda. Tada se može izgraditi deo "kocke" dizajna u centralnom kompozitnom dizajnu kako bi se uklopio model drugog stepena dodajući aksijalne i središnje tačke. Centralni kompozitni dizajn omogućava efikasnu procenu kvadratnih termina u modelu drugog reda, a takođe je lako dobiti željene dizajnerske osobine ortogonalnog blokiranja i rotabilnosti.

Ortogonalni blokirani dizajni (eng. *Orthogonal blocked designs*) omogućavaju nezavisno procenjivanje modela i blok efekata i minimiziranje varijacije u koeficijentu regresije. Rotirajuće konstrukcije pružaju poželjnu osobinu varijacije konstantne predikcije na svim tačkama koje su na jednakom rastojanju od dizajnerskog centra, čime se poboljšava kvalitet predviđanja.

6.4.3. Box – Behnken dizajn

Box-Behnken plan eksperimenta je izrađen 1960. godine od strane George Box-a i Donald Behnken-a. Metoda odzivne površine se takođe može sprovesti pomoću ovog plana koji ujedno predstavlja alternativu centralnom kompozicionom planu. Box-Behnken plan nije baziran na punom faktornom planu, odnosno ne sadrži tačke na vrhovima kocke i za svaki ispitivani faktor zahteva tri nivoa. Box-Behnkenov dizajn predlaže kako odabrati tačke eksperimenta kada je potrebno ispitati

uticaj više faktora na tri nivoa uz mogućnost efikasne procene koeficijenta matematičkih modela prvog i drugog reda. Ovaj dizajn je puno učinkovitiji i efikasniji od trofaktorijskog dizajna ($3k$) uglavnom zbog mogućnosti ispitivanja više promenljivih i to od 3 do 10 dok je trofaktorijski dizajn primjenjiv za ispitivanje do 4 promenljive i zahteva puno više eksperimenata.

Osnovne karakteristike ovoga dizajna su:

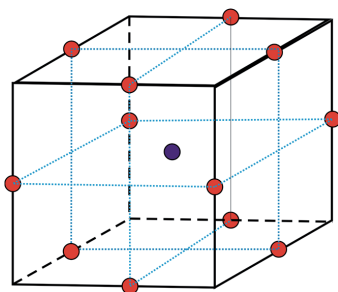
- zahteva broj eksperimenata definisan prema jednačini 6.19.

$$N=2^k+(k-1)c_p, \quad (6.19.)$$

gde je k broj faktora, a c_p broj ponavljanja eksperimenata u centralnoj tački.

- svi nivoi faktora moraju se svesti na tri nivoa (-1, 0, 1) s jednakim intervalom između nivoa.

Na slici 6.35. prikazan je Box-Behnken dizajn sa tri faktora. U ovom planu eksperimenta kombinacije nivoa faktora čine glavna stanja eksperimenta koja se nalaze na polovinama stranica eksperimentalnog prostora. Na ovaj način eksperimentalni prostor je ograničen i onemogućeno je izvođenje eksperimentalnih tačaka na vrhovima kocke, na primer +1 i +1. Ovo ujedno predstavlja prednost Box-Behnken plana jer je smanjen broj eksperimentalnih tačaka.



Slika 6.35. Box-Behnken dizajn sa tri faktora

U slučaju da se želi koristiti Box-Behnken dizajn pri izvođenju nesekvencijalnih eksperimenata, to jest, planira se samo jednom da se izvede eksperiment, ovaj dizajn omogućava efikasnu procenu koeficijenta prvog i drugog reda. Zbog toga što Box-Behnken dizajn ima manje dizajnerskih tačaka, oni su jeftiniji za rad nego centralni kompozitni dizajn sa istim brojem faktora.

Box-Behnken dizajn može se takođe pokazati korisnim ako se poznaje sigurna zona za proces. Centralni kompozitni dizajn obično ima aksijalne tačke izvan "kocke" (osim ako se ne navede α koje je manje ili jednako 1). Ove tačke ne mogu biti u oblasti od interesa, ili mogu biti nemoguće za opserviranje jer su izvan sigurnih radnih granica. Model Box-Behnken nema aksijalne tačke, tako da postoji sigurnost da će sve dizajnerske tačke pripadati sigurnosnoj radnoj zoni. Dizajn Box-Behnken takođe osigurava da svi faktori nikada nisu postavljeni na visokim nivoima istovremeno. U tabeli 6.13. dat je skraćeni Box-Behnken dizajn.

Tabela 6.13. *Skraćeni Box-Benkhen dizajn*

Faktori	Broj eksperimenata	Blokovi	Centralne tačke
3	15	1	3
4	27	3	3
5	46	2	6
6	54	2	6
7	62	2	6

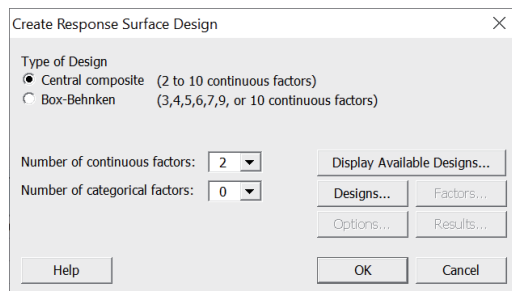
6.4.4. Metod odzivne površine u Minitabu

Koraci koji su dole navedeni su tipični za eksperiment odzivne površine. U zavisnosti od eksperimenta, mogu se izvršiti neki koraci u drugom redosledu, izvršiti određeni korak više od jednom ili eliminisati korak. Metoda odzivne površine se sastoji od sledećih koraka:

1. Odabir dizajna odzivne površine za eksperiment. Pre korišćenja Minitaba, mora se odrediti koji su faktori uticaja, tj. kakvi su uslovi procesa koji utiču na vrednosti promenljive odziva
2. Koristi se opcija **Create Response Surface Design** da bi se odabrao jedan od dva raspoloživa dizajna (centralni kompozitni ili Box-Behnken). **Define Custom Response Surface Design** (Definisanje dizajna odzive površine) se koristi u slučaju kreiranja dizajna iz podataka koji već postoje na radnom listu. Prilagođeni dizajn omogućava da se navede u kojoj koloni su faktori i druge karakteristike dizajna
3. Opcija **Modify Design** se koristi za preimenovanje faktora, promenu nivoa faktora, ponavljanje dizajna i randomizaciju dizajna
4. **Display Design** se koristi da bi promenili redosled radnji i jedinica u kojima Minitab izražava faktore na radnom listu
5. Izvršenje eksperimenta i sakupljanje podataka o odzivu
6. **Analyze Response Surface Design** (Analizu dizajna odzive površine) za prilagođavanje modela eksperimentalnim podacima
7. **Contour/Surface (Wireframe) Plots** - Konture / površina (žičani okvir) za prikazivanje odziva u vidu dijagrama
8. Ako se želi optimizovati odgovor, koristi se **Response Optimizer** ili **Overlaid Contour Plot** da bi se dobila numerička i grafička analiza

Pre korišćenja Minitaba, potrebno je utvrditi koji je dizajn najpogodniji za eksperiment. Da bi se kreirao dizajn odzivne površine u Minitabu koristi se sledeće:

1. **Stat > DOE > Response Surface > Create Response Surface Design**, slika 6.36.



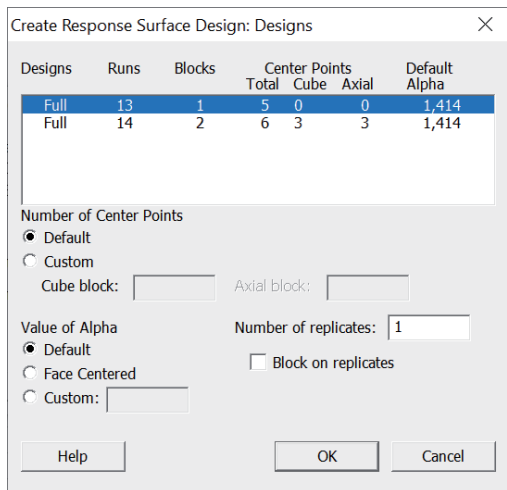
Slika 6.36. Prozor za kreiranje odzivne površine

2. Ako se želi videti rezime dizajna odzivne površine, aktivira se **Display Available Designs** (Prikaz dostupnih dizajna). Koristi se ova tabela da bi se upoređivale funkcije dizajna, slika 6.37.

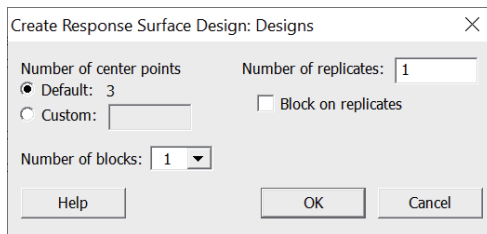
Design		Continuous Factors									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Central composite full	unblocked	13	20	31	52	90	152				
	blocked	14	20	30	54	90	160				
Central composite half	unblocked				32	53	88	154			
	blocked				33	54	90	160			
Central composite quarter	unblocked							90	156		
	blocked							90	160		
Central composite eighth	unblocked									158	
	blocked									160	
Box-Behnken	unblocked		15	27	46	54	62		130	170	
	blocked			27	46	54	62		130	170	

Slika 6.37. Raspoloživi dizajni odzivne površine

3. U okviru **Type of Design** (Tip dizajna) izabere se **Central composite** ili **Box-Behnken**.
4. Kod **Number of factors** (broja faktora) izabere se broj faktora:
 - za centralni kompozitni dizajn, odabere se od 2 do 6, slika 6.38.
 - za Box-Behnken dizajn, odabere se od 3 do 75, slika 6.39.



Slika 6.38. Kreiranje centralno kompozitnog dizajna



Slika 6.39. Kreiranje Box-Behnken dizajna

5. U ovim prozorima može se uraditi sledeće:

- za centralni kompozitni dizajn izabere se dizajn koji se želi kreirati sa liste prikazane na vrhu subdialog polja
- za dizajn Box-Behnken, ne mora se odabrati dizajn jer broj faktora određuje broj opservacija

6. Ako se želi, koristi se bilo koja opcija od navedenih u odeljku **Design subdialog box** ispod

7. Ako se želi, aktivira se **Options**, **Factors** ili **Results** da bi se koristila bilo koja od opcija navedenih ispod, a zatim se aktivira **OK**, da bi se kreirao željeni dizajn.

Blokiranje dizajna

Kada je broj eksperimenata prevelik da bi se završio pod uslovima stabilnog stanja, potrebno je razmotriti grešku koja se može uneti u eksperiment. Pokretanje eksperimenta u blokovima omogućava da se odvojeno i nezavisno procene blok efekti (ili različiti eksperimentalni uslovi) od faktorskih efekata. Na primer, blokovi mogu biti dani, dobavljači, serije sirovina, temperatura, operateri mašina ili izmena proizvodnje.

Za centralni kompozitni dizajn, broj ortogonalnih blokova zavisi od broja faktora, broja radova i projektna frakcije koja se izabere. Centralni kompozitni dizajn se uvek može razdvojiti u faktorijske blok i/ili aksijalne blok tačke. Sa tri ili više faktora faktorski blok se može podeliti na dva ili više blokova.

Vrednost α , u kombinaciji sa brojem centralnih tačaka, određuje da li dizajn pokazuje svojstva rotacije i ortogonalnog blokiranja. Minitab nudi podrazumevane dizajne koji postižu rotabilnost i ortogonalno blokiranje, kada se oba svojstva mogu postići istovremeno. Kada je dizajn blokiran i ne mogu se istovremeno postići obe osobine, podrazumevani dizajn obezbeđuje ortogonalno blokiranje.

Za dizajn Box-Behnken, broj načina blokiranja dizajna zavisi od broja faktora. Svi blokirani dizajni imaju ortogonalne blokove dizajna i sa:

- tri faktora se ne može blokirati,
- četiri faktora se mogu izvoditi u tri bloka
- pet, šest ili sedam faktora mogu se raditi u dva bloka. Kada se kreira dizajn, Minitab prikazuje odgovarajuće izbore.

Promena broja centara

Broj centralnih tačaka, zajedno sa α (za centralni kompozitni dizajn), određuje da li se dizajn može ortogonalno blokirati ili ne. Po defaultu, Minitab bira broj centralnih tačaka za postizanje ortogonalnog blokiranja. Uključivanje centralnih tačaka daje procenu eksperimentalne greške i omogućava da se proveri adekvatnost modela (*lack of fit*). Provera adekvatnosti ugrađenog modela je važna jer nepravilan ili nedefinisani model može dovesti do pogrešnih zaključaka. Podrazumevani broj centralnih tačaka je prikazan u okviru *Designs subdialog box*.

Promena broja centara u Minitabu se vrši na sledeći način:

1. U dijalogu *Create Response Surface Design* aktivira se *Designs*
2. Uradi se nešto od sledećeg, a zatim *OK*
 - Za centralni kompozitni dizajn, ispod *Number of center points* (Broj tačaka centara) izabere se *Custom* i unese se broj u *in cube*. Kada postoji više od jednog bloka u dizajnu, potrebno je uneti i broj koji označava broj centralnih tačaka u aksijalnom bloku u *in axial block*
 - Za dizajn Box-Behnken, ispod *Number of center points* izabere se *Custom* i unese se broj u okvir

Kada se Box-Behnken dizajn blokira, centrirane tačke se podjednako (što je više moguće) podele među blokovima

Promena vrednosti α za centralni kompozitni plan

Položaj aksijalnih tačaka u centralnom kompozitnom dizajnu označava se sa α . Vrednost α , zajedno sa brojem centralnih tačaka, određuje da li se dizajn može ortogonalno blokirati i rotirati. Orthogonalni blokirani dizajn omogućava nezavisno procenjivanje modela i blok efekata i minimiziranje varijacije u koeficijentu regresije. Rotirajuće konstrukcije pružaju poželjnu osobinu

varijacije konstantne predikcije na svim tačkama koje su jednako udaljene od dizajnerskog centra, čime se poboljšava kvalitet predviđanja. Standardni dizajn Minitaba postiže rotabilno i ortogonalno blokiranje kada se oba svojstva mogu postići istovremeno. Kada je dizajn blokiran i ne može se istovremeno postići obe osobine, podrazumevani dizajn koristi α tako da je dizajn ortogonalno blokiran. Podrazumevana vrednost α za svaki centralni kompozitni dizajn prikazana je u tabeli 6.12.

Za promenu vrednosti α , opcija je sledeća:

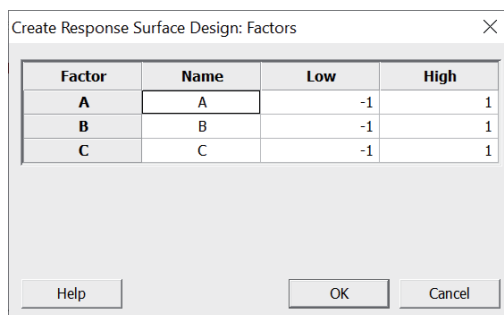
1. U dijalogu **Create Response Surface Design** aktivira se **Designs**
2. Uradi se nešto od dole navedenog, a zatim **OK**
 - da podešavanje $\alpha=1$, odabere se **Face Centered**. Kada je $\alpha=1$, aksijalne tačke se postavljaju na deo "kocke" dizajna. Ovo je odgovarajući izbor kada su tačke "kocke" dizajna u operativnim granicama
 - Odabere se opcija **Custom** i unesite se pozitivan broj u okvir. Vrednost manja od jedan postavlja aksijalne tačke unutar "kocke" dela dizajna
 - vrednost veća od jedan postavlja aksijalne tačke izvan "kocke"

Vrednost $\alpha=(F)^{1/4}$, gde je F broj faktorskih tačaka u dizajnu, garantuje rotabilnost.

Određivanje nivoa faktora

Za dodeljivanje nivoa faktora koristi se sledeće:

1. U dijalogu **Create Response Surface Design** izabere se **Factors**, slika 6.40. Ova opcija je dostupna samo za centralne kompozitne dizajne



Slika 6.40. Definisanje faktora centralnog kompozitnog plana

2. Ispod **Low**, aktivira se red za faktor kojem se želi dodeliti vrednost i unosi se bilo koja numerička vrednost, ista procedura se ponovi za **High**
3. Ponovi se korak 2 da bi se dodelili nivoi za druge faktore

4. Za centralni kompozitni dizajn, ispod **Levels Define**, izabere se **Cube points** (tačke kocke) ili **Axial points** (Aksijalne tačke) i navede se koje vrednosti su unete u **Low** (nisko) i **High** (visoko).

U centralnom kompozitnom dizajnu, vrednosti koje se unose za faktorske nivoe obično nisu minimalne i maksimalne vrednosti u dizajnu. One su niska i visoka podešavanja za deo dizajna "kocke". Aksijalne tačke su obično izvan "kocke" (osim ako se ne navede α koji je manji ili jednak 1).

Izbor **Axial points u Factors subdialog box** garantuje da će sve projektne tačke padati između definisane minimalne i maksimalne vrednosti faktora. Minitab će zatim odrediti odgovarajuća niska i visoka podešavanja za "kocku" na sledeći način:

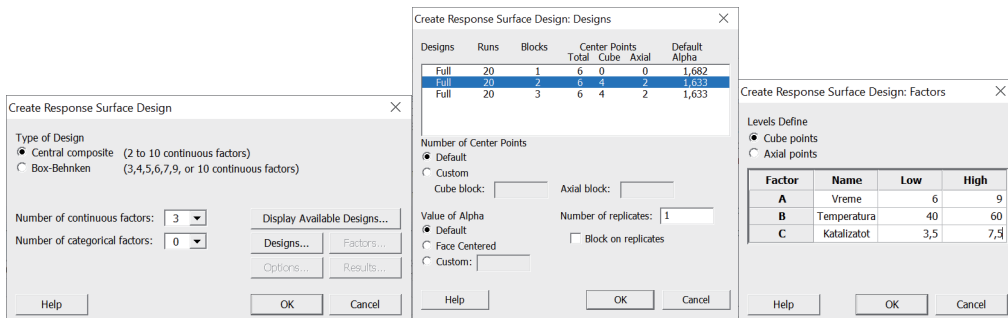
$$\text{Low Level Setting} = \frac{(\alpha-1)\text{max} + (\alpha+1)\text{min}}{2\alpha}$$

$$\text{High Level Setting} = \frac{(\alpha-1)\text{min} + (\alpha+1)\text{max}}{2\alpha}$$

Primer 6.4. (kreiranje centralnog kompozitnog dizajna) Eksperiment se sastoji od ispitivanja koje tri promenljive (vreme izloženosti kristala u katalizatoru, temperatura u komori za izlaganje i procenat katalizatora u vazduhu unutar komore) utiču na proces rasta kristala. Cilj eksperimenta je da se ispita uticaj pomenutih promenljivih na razmatrani proces rasta kristala. Generiše se centralni kompozitni dizajn za tri faktora i dva bloka (dizajn je u bloku zato što se eksperiment izvodio u dva dana). Faktorima se dodele odgovarajući nivoi i izvrši se randomizacija eksperimenta. Dizajn se kreira prema sledećem, slika 6.41:

1. Izabere se **Start > DOE > Surface Response > Create Response Surface Design**
2. U okviru **Type of Design** izabere se **Central Composite**
3. Pod **Number of factors** izabere se 3
4. Aktivira se **Designs** i izabere se dizajn sa dva bloka gde je podrazumevano $\alpha=1,633$, zatim **OK**
5. Aktivira se **Factors**, popuni se **Name, Low i High** kao što je prikazano u nastavku:

Factor	Name	Low	High
<i>A</i>	Vreme	6	9
<i>B</i>	Temperatura	40	60
<i>C</i>	Katalizator	3.5	7.5



Slika 6.41. Primer kreiranja centralno kompozitnog plana u Minitabu

6. Zatim **OK**, aktivira se **Results**. Izabere se **Summary table and data table**, zatim **OK**. Na slici 6.42. prikazan je izlaz iz Minitaba

Central Composite Desing				
Factors:	3	Replicates:	1	
Base runs:	20	Total runs:	20	
Base blocks:	2	Total blocks:	2	
Two-level factorial: Full factorial				
Cube points:	8			
Center points in cube:	4			
Axial points:	6			
Center points in axial:	2			
α : 1,633				
Design Table (randomized)				
Run	Blk	A	B	C
1	2	0,000	0,000	1,633
2	2	1,633	0,000	0,000
3	2	-1,633	0,000	0,000
4	2	0,000	-1,633	0,000
5	2	0,000	1,633	0,000
6	2	0,000	0,000	0,000
7	2	0,000	0,000	0,000
8	2	0,000	0,000	-1,633

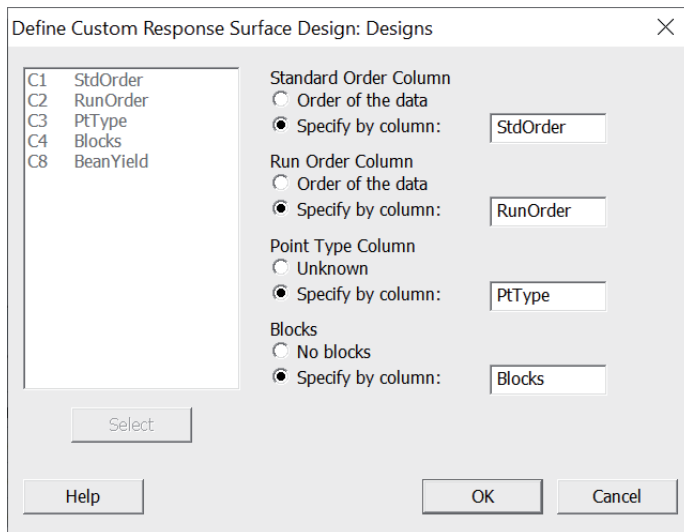
9	1	0,000	0,000	0,000
10	1	1,000	-1,000	1,000
11	1	-1,000	-1,000	1,000
12	1	-1,000	-1,000	-1,000
13	1	1,000	-1,000	-1,000
14	1	-1,000	1,000	-1,000
15	1	1,000	1,000	1,000
16	1	0,000	0,000	0,000
17	1	0,000	0,000	0,000
18	1	0,000	0,000	0,000
19	1	-1,000	1,000	1,000
20	1	1,000	1,000	-1,000

Slika 6.42. Izlaz iz MINITAB-a za postavljene dizajn

Kreiran je centralno kompozitni dizajn sa tri faktora koji će se odvijati u dva bloka. Ovaj dizajn je rotabilan i ortogonalno blokiran. Pošto je izabrano da se prikaže tabela sa rezimeom i podacima, Minitab prikazuje uslove eksperimenta ili postavke za svaki od faktora za tačke dizajna. Kada se izvodi eksperiment, koristi se redosled koji je prikazan da bi se utvrdili uslovi za svaku opservaciju. Na primer, u prvoj eksperimentalnoj postavci, vreme (A) je na 9 minuta (1 = visoko), temperatura (B) na 40° (-1=nisko) i 3,5 grama katalizatora (C) (-1=nisko).

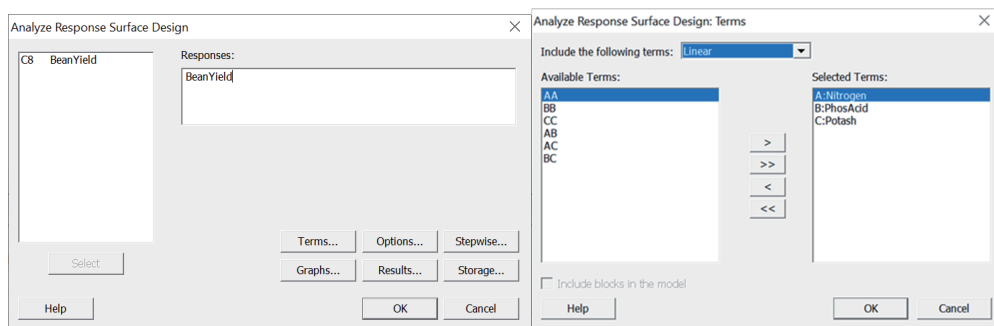
Primer 6.5. (podešavanje centralno kompozitnog dizajna). Na bazi podataka koji se nalaze u fajlu *Ccd_Ex1.MTV* adaptira se centralni kompozitni plan prema sledećem:

1. Izabere se **Start > DOE > Surface Response > Define Custom Response Surface Design**
2. U polje **Continuous Factors** potrebno je uneti faktore **Nitrogen, PhosAcid i Potash**
3. U opciji **Low/High** potrebno je sa **OK** potvrditi nivoe faktora koje je Minitab prepoznao
4. U opciji **Designs** potrebno je podesiti prema slici 6.43.



Slika 6.43. Podešavanje centralnog kompozitnog plana iz fajla *Ccd_Ex1.MTV*

Prvo se vrši podešavanje linearnog modela (*Analyze Response Surface Design > Terms*), slika 6.44. (kao odziv se uzima **BeanYield**).



Slika 6.44. Podešavanje linearnog modela

Izlaz iz Minitaba za postavljeni linearni model je prikazan na slici 6.45.

Response Surface Regression: BeanYield versus Nitrogen; PhosAcid; Potash						
Analysis of Variance						
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value	
Model	3	7,7886	2,5962	1,08	0,387	
Linear	3	7,7886	2,5962	1,08	0,387	
Nitrogen	1	4,4960	4,4960	1,86	0,191	
PhosAcid	1	0,4593	0,4593	0,19	0,668	
Potash	1	2,8332	2,8332	1,17	0,295	
Error	16	38,5965	2,4123			
Lack-of-Fit	11	36,0569	3,2779	6,45	0,026	
Pure Error	5	2,5396	0,5079			
Total	19	46,3851				
Model Summary						
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)			
1,55315	16,79 %	1,19 %	0,00 %			
Coded Coefficients						
Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	p-Value	VIF
Constant		10,198	0,347	29,36	0,000	
Nitrogen	-1,930	-0,965	0,707	-1,37	0,191	1,00
PhosAcid	0,617	0,308	0,707	0,44	0,668	1,00
Potash	1,532	0,766	0,707	1,08	0,295	1,00
Regression Equation in Uncoded Units						
BeanYield = 10,01 - 0,361×Nitrogen + 0,258×PhosAcid + 0,426×Potash						
Fits and Diagnostics for Unusual Observations						
Obs	BeanYels	Fit	Resid	Std Resid		
7	8,260	11,163	-2,903	-2,17	R	
16	13,190	10,500	2,690	2,03	R	
R	Large residual					

Slika 6.45. Analiza postavljenog linearnog modela

Važno je proveriti adekvatnost ugrađenog modela, jer pogrešan ili nedovoljno definisan model može dovesti do pogrešnih zaključaka. Proveravajući podešenost linearnog (prvog reda) modela može se reći da je model ispod traženog. Mala p -vrednost **Lack-of-Fit** ($p=0.026$) zbog nedostatka fit testa pokazuje da linearni model ne odgovara odgovarajućoj odzivnoj površini. F -statistika za ovaj test je ($Adj MS$ za **Lack of Fit**)/($Adj MS$ za **Pure Error**). Pošto linearni model ne odgovara odgovarajućoj odzivnoj površini, potrebno je izabrati kvadratni model tj. model drugog reda (u opciji **Terms** se izabere **Full quadratic**). Rezultati za ovako postavljen model su prikazani na slici 6.46.

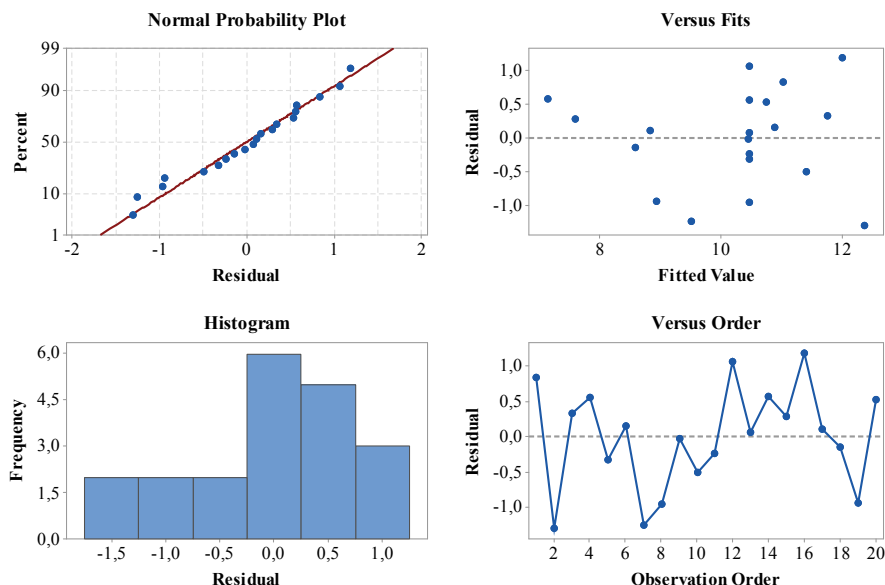
Response Surface Regression: BeanYield versus Nitrogen; PhosAcid; Potash					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	9	36,4653	4,0517	4,08	0,019
Linear	3	7,7886	2,5962	2,62	0,109
Nitrogen	1	4,4960	4,4960	4,53	0,059
PhosAcid	1	0,4593	0,4593	0,46	0,512
Potash	1	2,8332	2,8332	2,86	0,122
Square	3	13,3857	4,4619	4,50	0,030
Nitrogen*Nitrogen	1	6,5943	6,5943	6,65	0,027
PhosAcid*PhosAcid	1	4,5640	4,5640	4,60	0,058
Potash*Potash	1	1,0772	1,0772	1,09	0,322
2-Way Interaction	3	15,2910	5,0970	5,14	0,021
Nitrogen*PhosAcid	1	3,6721	3,6721	3,70	0,083
Nitrogen*Potash	1	11,1864	11,1864	11,28	0,007
PhosAcid*Potash	1	0,4324	0,4324	0,44	0,524
Error	10	9,9198	0,9920		
Lack-of-Fit	5	7,3802	1,4760	2,91	0,133
Pure Error	5	2,5396	0,5079		
Total	19	46,3851			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		

0,995984	78,61 %	59,37 %	0,00 %			
Coded Coefficients						
Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	p-Value	VIF
Constant		10,198	0,406	25,76	0,00	
Nitrogen	-1,930	-0,965	0,453	-2,13	0,059	1,00
PhosAcid	0,617	0,308	0,453	0,68	0,512	1,00
Potash	1,532	0,766	0,453	1,69	0,122	1,00
Nitrogen*Nitrogen	-3,827	-1,913	0,742	-2,58	0,027	1,00
PhosAcid*PhosAcid	3,183	1,592	0,742	2,14	0,058	1,00
Potash*Potash	-1,547	-0,773	0,742	-1,04	0,322	1,00
Nitrogen*PhosAcid	-3,833	-1,916	0,996	-1,92	0,083	1,00
Nitrogen*Potash	6,689	3,345	0,996	3,36	0,007	1,00
PhosAcid*Potash	1,315	0,658	0,996	0,66	0,524	1,00
Regression Equation in Uncoded Units						
BeanYield = 12,45 + 0,96×Nitrogen - 2,28×PhosAcid - 1,48×Potash - 0,268×Nitrogen*Nitrogen + 1,116×PhosAcid*PhosAcid - 0,239×Potash*Potash - 0,600×Nitrogen*PhosAcid + 0,695×Nitrogen*Potash + 0,306×PhosAcid*Potash						
Fits and Diagnostics for Unusual Observations						
Obs	BeanYields	Fit	Resid	Std Resid		
2	11,060	12,362	-1,302	-2,09	R	
7	8,260	9,514	-1,254	-2,01	R	
16	13,190	12,004	1,186	2,07	R	
R	Large residual					

Slika 6.46. Analiza postavljenog kvadratnog modela

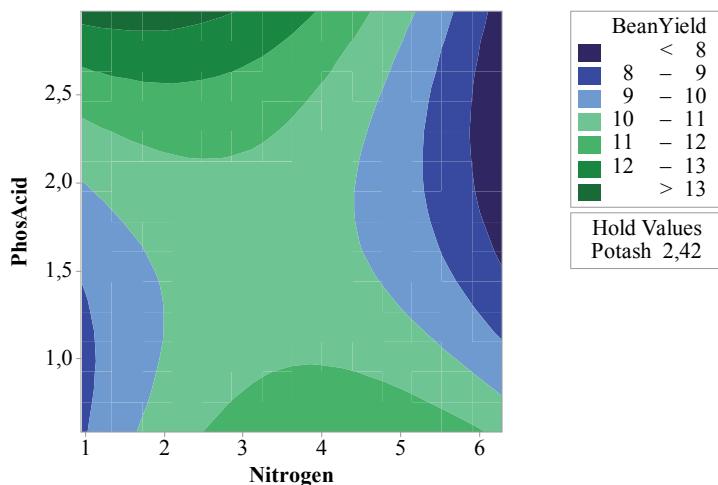
Rezultati dobijeni pomoću linearnog modela ukazali su na potrebu primene višeg modela i postavlja se pun kvadratni model. Za pun kvadratni model, *p*-vrednost **lack of fit** je 0,133 što ukazuje na to da ovaj model adekvatno odgovara podacima. Prva tabela o rezultatima daje koeficijente za sve izraze u modelu. Zato što je korišćen ortogonalni dizajn, svaki efekat se procenjuje nezavisno. Dakle, koeficijenti za linearne termine su isti kao kada se postavlja linearni model. Termin greške, $s = 0.996$, je manji jer je smanjena varijabilnost koja je evidentirana greškom. Tabela analize varijanse rezimira linearne izraze, kvadratne izraze i interakcije. Manje *p*-vrednosti za interakcije ($p = 0.021$) i kvadratne

izraze ($p = 0.030$) ukazuju na zakrivljenost na odzivnoj površini. U tabeli procenjenih koeficijenata regresije, vide se male p -vrednosti za interakciju *Nitrogen*Potash* ($p=0,007$), *Nitrogen*Nitrogen* ($p=0.027$), i *PhosAcid*PhosAcid* ($p = 0.058$) sugerišući da ovi efekti mogu biti važni. Sa slike 6.47. može se takođe uočiti, na osnovu reziduala, da je model adekvatan.

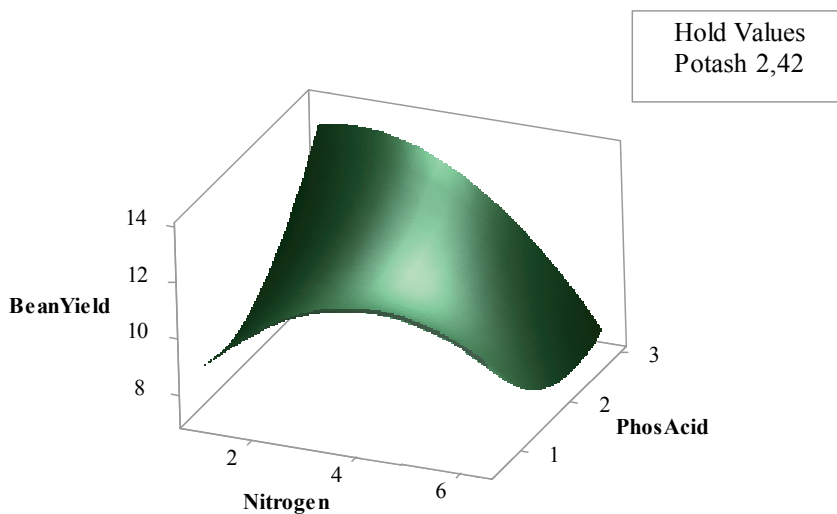


Slika 6.47. Dijagrami reziduala za primer 6.5.

Mogu se koristiti konturni/površinski (*Wireframe*) dijagrami da bi se prikazale dve vrste površina kao izlaz iz dizajna eksperimenta odzivne površine. Ovi dijagrami pokazuju odnos promene dve promenljive (faktora) zasnovano na jednačini modela. Konturni i površinski dijagrami se koriste za uspostavljanje poželjnih vrednosti odziva i uslova rada (*Stat > DOE > Response Surface > Contour Plot*). U konturnom dijagramu, odzivna površina se posmatra kao dvodimenzionalna ravan, u kojoj su polja različitih interesnih područja odziva odvojeni linijama (bojama). Površinski dijagram prikazuje trodimenzionalni pogled koji može pružiti jasniju sliku odziva površine (*Stat > DOE > Response Surface > Surface Plot*). Slika 6.48. i slika 6.49, prikazuju konturni i površinski dijagram za primer 6.5.



Slika 6.48. Odzivna površina preko konturnog dijagrama



Slika 6.49. Odzivna površina preko površinskog dijagrama

Konturi dijagram prikazuje da se najveći odziv dobija kada je nivo azota (**Nitrogen**) nizak i nivo fosforne kiseline (**PhosAcid**) visok. Ova oblast se pojavljuje u gornjem levom uglu dijagrama. Površinski dijagram takođe pokazuje da se najveći odziv dobija kada je nivo azota nizak i nivo fosforne kiseline visok. Osim toga, može se videti oblik odzive površine i dobiti opšta ideja odziva na različitim postavkama azota i fosforne kiseline. Treba imati na umu da su ovi dijagrami zasnovani na jednačini modela i stoga je potrebno proveriti adekvatnost modela.

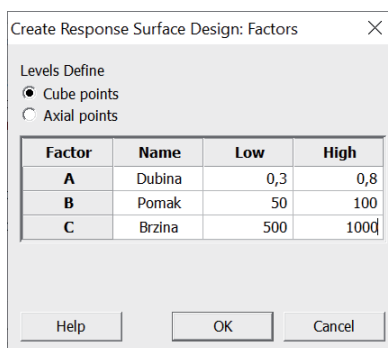
Primer 6.6. Potrebno je modelovati odzivnu karakteristiku kvaliteta (hrapavost predstavljenu preko R_a) aluminijumske legure koja se obrađuje operacijom glodanja u zavisnosti od tri ulazne promenljive (dubina rezanja, pomak i brzina rezanja). Za postavku eksperimenta korišćen je centralno kompozitni plan. Za broj faktora 3, ukupan broj eksperimenata na rogljevima je 8 ($n_f=2^3$), 6 eksperimanata u centralnoj tački (2k) i 6 eksperimenata u centru van kocke (2k), što znači da je ukupan broj eksperimenata 20. Za α je usvojena vrednost 1.68179 ($n_f^{1/4}$) i ovakav dizaj se naziva rotabilan centralno kompozitni dizajn. U tabeli 6.14. su predstavljeni faktori i njihovi odgovarajući nivoi.

Tabela 6.14. Faktori i njima pripadajući nivoi za primer 6.6.

Faktor	Nivoi – kodirani i (stvarni)				
Dubina (A) mm	-1.68179 (0.13)	-1 (0.3)	0 (0.55)	1 (0.8)	1.68179 (0.97)
Pomak (B) mm/min	-1.68179 (32.96)	-1 (50)	0 (75)	1 (100)	1.68179 (117.04)
Brzina (C) obrtaja/min	-1.68179 (329.55)	-1 (500)	0 (750)	1 (1000)	1.68179 (1170.45)

Kreiranje dizajna u Minitabu

Za kreiranje centralnog kompozitnog dizajna koriste se, kako je već rečeno, sledeće opcije: *Stat > Doe > Response Surface > Create response Surface design*, izabere se *Central composite* i *Number of continuous factors* je 3. Otvaranjem opcije *Designs* izabere se *Full dizajn* sa jednim blokom gde je vrednost α po „difoltu“ 1.682, zatim **OK**. Zatim se odabere opcija **Factors** i unesu se vrednosti nivoa (unose se samo vrednosti nižeg -1 i višeg 1 nivoa, a Minitab sam proračuna centralne tačke i tačke centra van kocke), slika 6.50, zatim OK.



Slika 6.50. Izbor faktora i njima pripadajućih nivoa za primer 6.6.

U **Options** se aktivira da eksperiment ne bude randomiziran, zatim dva puta **OK**. Izlaz iz Minitaba predstavlja dizajn eksperimenta. Na slici 6.51. je dat kreiran centralno kompozitni plan za primer 6.6 i dodat je odziv (srednja aritmetička hrapavost *Ra*) u zadnjoj koloni (C8) radnog prozora Minitaba.

Central Composite Desing								
Factors:		3	Replicates:		1			
Base runs:		20	Total runs:		20			
Base blocks:		1	Total blocks:		1			
Two-level factorial: Full factorial								
Cube points:		8						
Center points in cube:		6						
Axial points:		6						
Center points in axial:		0						
α :		1,68179						

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Dubina	Pomak	Brzina	Ra
1	1	1	1	1	0,300000	50,000	500,00	6,25
2	2	2	1	1	0,800000	50,000	500,00	5,14
3	3	3	1	1	0,300000	100,000	500,00	7,11
4	4	4	1	1	0,800000	100,000	500,00	6,70
5	5	5	1	1	0,300000	50,000	1000,00	1,15
6	6	6	1	1	0,800000	50,000	1000,00	0,83
7	7	7	1	1	0,300000	100,000	1000,00	6,19
8	8	8	1	1	0,800000	100,000	1000,00	5,82
9	9	9	-1	1	0,129552	75,000	750,00	5,86
10	10	10	-1	1	0,970448	75,000	750,00	5,76
11	11	11	-1	1	0,550000	32,955	750,00	0,52
12	12	12	-1	1	0,550000	117,045	750,00	6,97
13	13	13	-1	1	0,550000	75,000	329,55	6,11
14	14	14	-1	1	0,550000	75,000	1170,45	2,75
15	15	15	0	1	0,550000	75,000	750,00	6,21
16	16	16	0	1	0,550000	75,000	750,00	5,76
17	17	17	0	1	0,550000	75,000	750,00	5,81
18	18	18	0	1	0,550000	75,000	750,00	5,85
19	19	19	0	1	0,550000	75,000	750,00	6,18
20	20	20	0	1	0,550000	75,000	750,00	5,21

Slika 6.51. Kreiran centralno kompozitni plan za primer 6.6. u Minitabu

Zatim se sprovodi statistička analiza nad dobijenim podacima izborom opcije **Stat > Doe > Response Surface > Analyze Response surface design**, u **Terms** se izabere postavka kvadratnog modela (može se izabrati još ili linearni model, ili linearni sa interakcijama).

Iz ANOVA tablice, slika 6.52, zaključuje se sledeće

1. Kvadrati model je odgovarajući (velike vrednosti **R-sq** – predstavlja deo objašnjenja varijabilnosti u ukupnoj varijabilnosti i **R-sq (adj)** – koristi se jer ne zavisi od broja promenljivih dodatih u regresiji; ako se **R-sq** i **R-sq (adj)** značajno ne razlikuju, može se zaključiti da nisu značajni termini koji nisu uključeni u model.
2. Vrednost **p** za **Lack-of-Fit** pokazuje da greška statistički nije značajna tj. $p > \alpha$
3. Na hrapavost obrađene površine na osnovu **F** statistike tj. **p** – vrednosti značajni su faktori pomak i brzina, kvadrati pomaka i brzine i interakcija između pomaka i brzine.

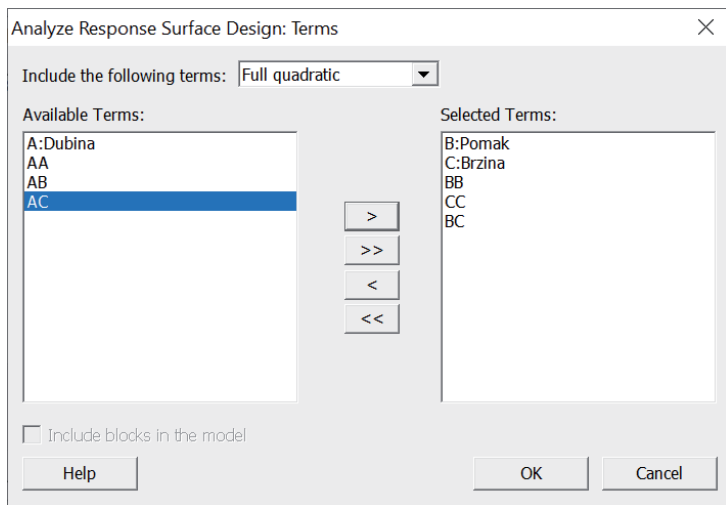
Response Surface Regression: Ra versus Dubina; Pomak; Brzina					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	9	77,2053	8,5784	38,97	0,000
Linear	3	60,9745	20,3248	92,34	0,109
Dubina	1	0,4141	0,4141	1,88	0,200
Pomak	1	39,7439	39,7439	180,56	0,000
Brzina	1	20,8165	20,8165	94,57	0,000
Square	3	13,3857	4,4619	4,50	0,030
Dubina*Dubina	1	0,0446	0,0446	0,20	0,662
Pomak*Pomak	1	6,5553	6,5553	29,78	0,000
Brzina*Brzina	1	2,6927	2,6927	12,23	0,006
2-Way Interaction	3	7,3779	2,4593	11,17	0,002
Dubina*Pomak	1	0,0528	0,0528	0,24	0,635
Dubina*Brzina	1	0,0861	0,0861	0,39	0,546
Pomak*Brzina	1	7,2390	7,2390	32,89	0,000
Error	10	2,2011	0,2201		
Lack-of-Fit	5	1,5444	0,3089	2,35	0,185
Pure Error	5	0,6567	0,1313		

Total	19	79,4064	
Model Summary			
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,469162	97,23 %	94,73 %	83,91 %

Slika 6.52. Analiza varijanse za primer 6.6.

Ako se ponovi procedura analize eksperimentalnog dizajna i u opciji **Terms** se isključe faktori (slika 6.53.), kvadrati faktora i interakcije koje nisu statistički signifikantni (na osnovu p vrednosti) dobija se ANOVA tablica za redukovani model (slika 6.54) i redukovana jednačina modela, jednačina 6.20.

$$Ra = 2,96 + 0,1173 \times Pomak - 0,00585 \times Brzina - 0,001088 \times (Pomak \times Pomak) - 0,000007 \times (Brzina \times Brzina) + 0,000152 \times (Pomak \times Brzina) \quad (6.20)$$



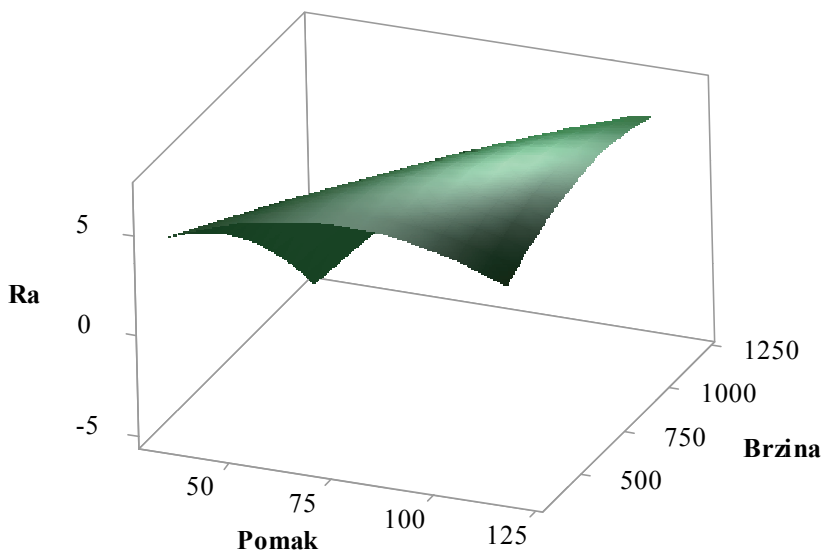
Slika 6.53. Kreiranje redukovanog modela u Minitabu

Response Surface Regression: Ra versus Dubina; Pomak; Brzina					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	5	76,6076	15,3215	76,64	0,000
Linear	2	60,9745	30,2802	151,47	0,000
Pomak	1	39,7439	39,7439	198,80	0,000

Brzina	1	20,8165	20,8165	104,13	0,000
Square	2	20,8165	4,4041	22,03	0,000
Pomak*Pomak	1	6,7295	6,7295	33,66	0,000
Brzina*Brzina	1	2,7895	2,7895	13,95	0,002
2-Way Interaction	1	7,2390	7,2390	36,21	0,000
Pomak*Brzina	1	7,2390	7,2390	36,21	0,000
Error	14	2,7988	0,1999		
Lack-of-Fit	9	2,1421	0,2380	1,81	0,266
Pure Error	5	0,6567	0,1313		
Total	19	79,4064			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,447118	96,48 %	95,22 %	89,50 %		

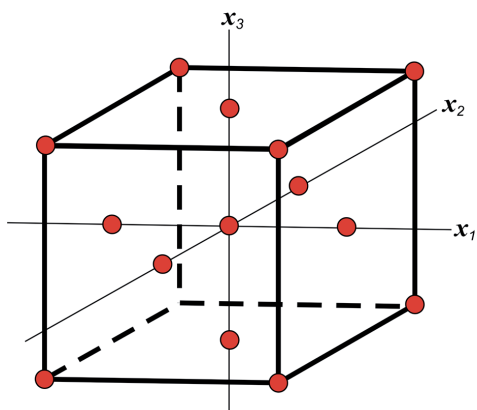
Slika 6.54. Analiza varijanse za redukovani model

Na slici 6.55 prikazan je površinski dijagram koji pokazuje da se najbolji odziv (najmanja vrednost R_a) dobija kada je pomak na najmanjoj vrednosti, a brzina rezanja na najvećoj.



Slika 6.55. Površinski dijagram za primer 6.6.

Primer 6.7. Podaci za ovaj primer su preuzeti iz naučnog rada doi.org/10.1016/j.jclepro.2015.02.015. Za potrebe optimizacije čeonog glodanja konstrukcionog čelika u odnosu na različite metode hlađenja/podmazivanja u kombinaciji sa režimima obrade korišćen je centralno kompozitni plan. Za α je usvojena vrednost 1 tako da se dobija centralno kompozitni plan prikazan na slici 6.56.



Slika 6.56. Šema centralnog kompozitnog plana sa tri faktora i vrednosti $\alpha=1$

Centralno kompozitni dizajn je uključio tri numerička faktora (dubina rezanja, pomak i broj obrtaja glavnog vretena) sa po tri nivoa i jedan kategorički faktor (vrsta hlađenja/podmazivanja) sa tri nivoa, tabela 6.15.

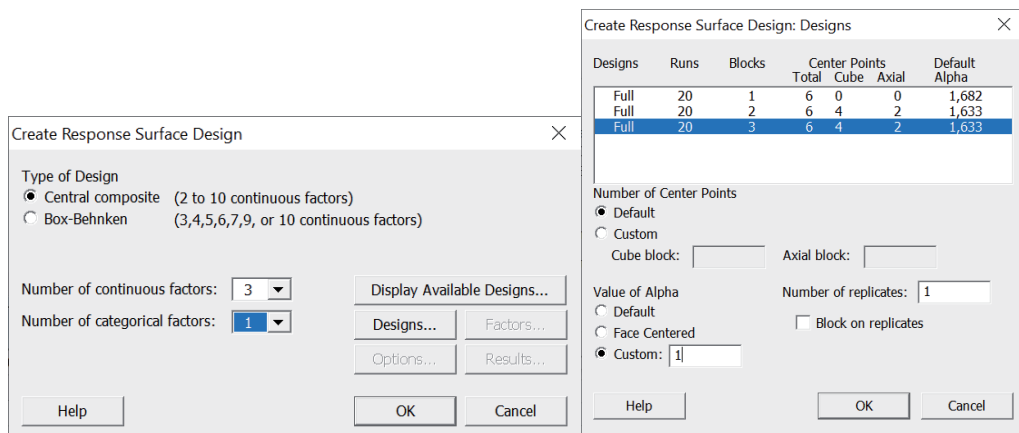
Tabela 6.15. Faktori i njima pripadajući nivoi za primer 6.7.

Ime	Faktor	Jedinica	Nizak nivo	Srednji nivo	Visok nivo
			-1	0	+1
Dubina rezanja	A	mm	0.5	1	1.5
Pomak	B	mm/min	100	300	500
Broj obrtaja	C	o/min	400	600	800
Hlađenje/podmazivanje	D		Suvo	Kroz alat	Polivanje

Za sprovođenje eksperimenta, sva tri osnovna principa dizajna eksperimenta, tj. (randomizacija, ponavljanje i blokiranje) su uzeti u obzir. Pošto nije bilo moguće spovesti eksperimente u jednom danu, eksperimenti su podeljeni u blokove i kako se eksperiment vršio tri dana eksperiment je podeljen u tri bloka.

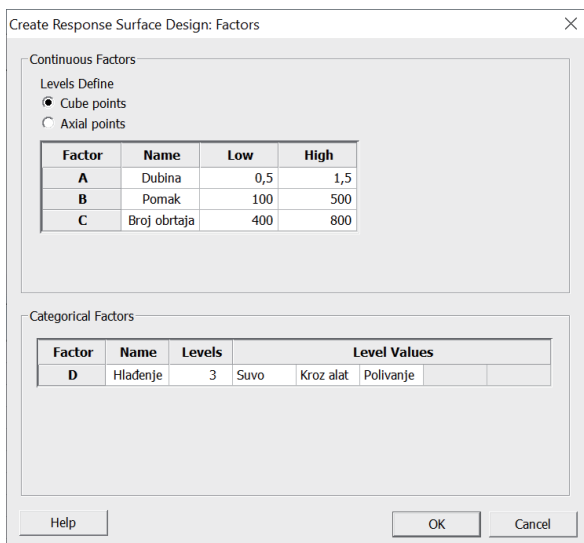
Kreiranje dizajna u Minitab-u

Za kreiranje centralnog kompozitnog plana za primer 6.7. u Minitabu korišćene su opcije prema slici 6.57. Može se primetiti da postoje tri kontinuirana faktora (vrednosti nivoa su numeričke vrednosti) i jedan kategorički (opisni) faktor.



Slika 6.57. Postavka eksperimenta za primer 6.7. u Minitabu

Zatim se u opciji **Factors** imenuju faktori i dodele im se odgovarajući nivoi, slika 6.58:



Slika 6.58. Izbor faktora i njima pripadajućih nivoa za primer 6.7

Dobija se željeni dizajn eksperimenta koji sadrži ukupno 60 eksperimenata, od kojih je 24 u tačkama kuba, 12 u centralnoj kubnoj, 18 u aksijalnim tačkama i 6 u centralnim aksijalnim tačkama eksperimenata, slika 6.59.

Central Composite Desing			
Factors:	4	Replicates:	1
Base runs:	60	Total runs:	60
Base blocks:	3	Total blocks:	3
Two-level factorial: Full factorial			
Cube points:	24		
Center points in cube:	12		
Axial points:	18		
Center points in axial:	6		
α : 1			

Slika 6.59. Kreiran centralno kompozitni plan za primer 6.7. u Minitabu

U tabeli 6.16. je dat plan eksperimenta i odzivna karakteristika - hrapavost obrađene površine – *Ra* (plan je prikazan kao nerandomiziran zbog lakšeg unosa podataka u Minitab).

Tabela 6.16. Eksperimentalna postavka i vrednosti odziva *Ra* za primer 6.7

StdO	RunO	PtType	Blok	Dubina	Pomak	Broj obrtaja	Hlađenje	<i>Ra</i>
1	1	1	1	0.5	100	400	Suvo	0,46
2	2	1	1	1.5	500	400	Suvo	1,2
3	3	1	1	1.5	100	800	Suvo	0,59
4	4	1	1	0.5	500	800	Suvo	0,49
5	5	0	1	1	300	600	Suvo	1,43
6	6	0	1	1	300	600	Suvo	1,18
7	7	1	1	0.5	100	400	Kroz alat	1,13
8	8	1	1	1.5	500	400	Kroz alat	0,97
9	9	1	1	1.5	100	800	Kroz alat	0,81
10	10	1	1	0.5	500	800	Kroz alat	0,99
11	11	0	1	1	300	600	Kroz alat	1,35
12	12	0	1	1	300	600	Kroz alat	1,24
13	13	1	1	0.5	100	400	Polivanje	0,75
14	14	1	1	1.5	500	400	Polivanje	1,75
15	15	1	1	1.5	100	800	Polivanje	0,69
16	16	1	1	0.5	500	800	Polivanje	1,48
17	17	0	1	1	300	600	Polivanje	2,28

18	18	0	1	1	300	600	Polivanje	1,97
19	19	1	2	1.5	100	400	Suvo	0,84
20	20	1	2	0.5	500	400	Suvo	1,67
21	21	1	2	0.5	100	800	Suvo	0,38
22	22	1	2	1.5	500	800	Suvo	0,47
23	23	0	2	1	300	600	Suvo	1,15
24	24	0	2	1	300	600	Suvo	1,27
25	25	1	2	1.5	100	400	Kroz alat	1
26	26	1	2	0.5	500	400	Kroz alat	0,87
27	27	1	2	0.5	100	800	Kroz alat	0,63
28	28	1	2	1.5	500	800	Kroz alat	1,22
29	29	0	2	1	300	600	Kroz alat	1,59
30	30	0	2	1	300	600	Kroz alat	1,17
31	31	1	2	1.5	100	400	Polivanje	0,81
32	32	1	2	0.5	500	400	Polivanje	1,37
33	33	1	2	0.5	100	800	Polivanje	0,63
34	34	1	2	1.5	500	800	Polivanje	1,74
35	35	0	2	1	300	600	Polivanje	2,19
36	36	0	2	1	300	600	Polivanje	2,16
37	37	-1	3	0.5	300	600	Suvo	1,19
38	38	-1	3	1.5	300	600	Suvo	0,88
39	39	-1	3	1	100	600	Suvo	1,44
40	40	-1	3	1	500	600	Suvo	1,24
41	41	-1	3	1	300	400	Suvo	1,89
42	42	-1	3	1	300	800	Suvo	0,97
43	43	0	3	1	300	600	Suvo	1,33
44	44	0	3	1	300	600	Suvo	1,29
45	45	-1	3	0.5	300	600	Kroz alat	1,04
46	46	-1	3	1.5	300	600	Kroz alat	0,98
47	47	-1	3	1	100	600	Kroz alat	0,65
48	48	-1	3	1	500	600	Kroz alat	1,12
49	49	-1	3	1	300	400	Kroz alat	1,41
50	50	-1	3	1	300	800	Kroz alat	1,03
51	51	0	3	1	300	600	Kroz alat	1,11
52	52	0	3	1	300	600	Kroz alat	1,41
53	53	-1	3	0.5	300	600	Polivanje	1,73
54	54	-1	3	1.5	300	600	Polivanje	2,38
55	55	-1	3	1	100	600	Polivanje	1,82
56	56	-1	3	1	500	600	Polivanje	2,03
57	57	-1	3	1	300	400	Polivanje	2,1
58	58	-1	3	1	300	800	Polivanje	1,97
59	59	0	3	1	300	600	Polivanje	2,25
60	60	0	3	1	300	600	Polivanje	1,88

Analizom eksperimentalnih rezultata postavljen je model drugog reda (kvadratni model) i signifikantni su faktori, kvadrati faktora i interakcije između faktora čija je vrednost p manja od 0.05. Ovo je prikazano u analizi varijanse na slici 6.60.

Response Surface Regression: Ra versus Blocks; Dubina; Pomak; Broj obrtaja; Hladenje					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	19	12,6525	0,66592	8,57	0,000
Blocks	2	0,0284	0,01419	0,18	0,834
Linear	5	6,9993	1,39986	18,02	0,000
Dubina	1	0,0770	0,07701	0,99	0,325
Pomak	1	1,1920	1,19201	15,35	0,000
Broj obrtaja	1	0,5686	0,56856	7,32	0,010
Hladenje	2	5,1617	2,58085	33,23	0,000
Square	3	3,2828	1,09425	14,09	0,000
Dubina*Dubina	1	0,6012	0,60119	7,74	0,008
Pomak*Pomak	1	0,5301	0,53008	6,83	0,013
Broj obrtaja*Broj obrtaja	1	0,0493	0,04929	0,63	0,430
2-Way Interaction	9	1,0724	0,11916	1,53	0,169
Dubina*Pomak	1	0,0033	0,00327	0,04	0,839
Dubina*Broj obrtaja	1	0,015	0,015	0,19	0,663
Dubina*Hladenje	2	0,1364	0,06822	0,88	0,423
Pomak*Broj obrtaja	1	0,0013	0,00135	0,02	0,896
Pomak*Hladenje	2	0,4301	0,21504	2,77	0,075
Broj obrtaja*Hladenje	2	0,4863	0,24314	3,13	0,055
Error	40	3,1065	0,07766		
Lack-of-Fit	31	2,8111	0,09068	2,76	0,055
Pure Error	9	0,2955	0,03283		
Total	59	15,7591			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,278682	80,29 %	70,92 %	39,20 %		

Slika 6.60. Analiza varijanse za primer 6.7

Vrednost **Lack-of Fit** pokazuje da je pretpostavljeni model dobar ($0.055 > 0.05$) mada bi bilo bolje da je razlika veća. Zbog pojednostavljenja, postavlja se jednačina modela za redukovani model koji uključuje signifikantne uticaje i određene nesignifikantne uticaje iz analize varijanse sa slike 6.60. Analiza varijanse ovako definisanog modela prikazana je na slici 6.61.

Response Surface Regression: Ra versus Blocks; Dubina; Pomak; Broj obrtaja; Hlađenje					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	11	12,0171	1,09246	14,01	0,000
Blocks	2	0,0411	0,02053	0,26	0,770
Linear	5	6,9993	1,39986	17,96	0,000
Dubina	1	0,077	0,07701	0,99	0,325
Pomak	1	1,192	1,19201	15,29	0,000
Broj obrtaja	1	0,5686	0,56856	7,29	0,01
Hlađenje	2	5,1617	2,58085	33,11	0,000
Square	2	3,2335	1,61674	20,74	0,000
Dubina*Dubina	1	0,8208	0,8208	10,53	0,002
Pomak*Pomak	1	0,7321	0,73213	9,39	0,004
2-Way Interaction	2	0,4863	0,24314	3,12	0,053
Broj obrtaja*Hlađenje	2	0,4863	0,24314	3,12	0,053
Error	48	3,742	0,07796		
Lack-of-Fit	39	3,4465	0,08837	2,69	0,058
Pure Error	9	0,2955	0,03283		
Total	59	15,7591			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,279210	76,26 %	70,81 %	60,00 %		

Slika 6.61. Analiza varijanse za redukovani model za primer 6.7

Za ovaj redukovani model regresije koeficijent višestruke determinacije $R\text{-}Sq$ je 0,77. Prilagođeni koeficijent određivanja $R\text{-}Sq(adj)$ koji ne zavisi od broja promenljivih dodanih modelu, je 0,71. Obični i prilagođeni koeficijenti determinacije se ne razlikuju značajno; stoga, može se zaključiti da su neznačajni pojmovi verovatno isključeni iz modela. U nastavku su date regresione jednačine modela za svaki nivo kategoričnog faktora, slika 6.62.

Regression Equation in Uncoded Units	
Hlađenje	
Suvo	$R_a = 0,066 + 2,501 \times \text{Dubina} + 0,00525 \times \text{Pomak} - 0,001580 \times \text{Broj obrtaja} - 1,200 \times \text{Dubina} \times \text{Dubina} - 0,000007 \times \text{Pomak} \times \text{Pomak}$
Kroz alat	$R_a = - 0,654 + 2,501 \times \text{Dubina} + 0,00525 \times \text{Pomak} - 0,000350 \times \text{Broj obrtaja} - 1,200 \times \text{Dubina} \times \text{Dubina} - 0,000007 \times \text{Pomak} \times \text{Pomak}$
Polivanje	$R_a = - 0,170 + 2,501 \times \text{Dubina} + 0,00525 \times \text{Pomak} - 0,000135 \times \text{Broj obrtaja} - 1,200 \times \text{Dubina} \times \text{Dubina} - 0,000007 \times \text{Pomak} \times \text{Pomak}$

Slika 6.62. Regresione jednačine za svaki nivo kategoričkog faktora

Primenom deskriptivne statistike može se formirati tabela srednjih vrednosti, tabela 6.17:

Tabela 6.17. Srednje vrednosti za određene nivoe razmatranih faktora

	Nizak nivo	Srednji nivo	Visok nivo
Dubina	0,99	1,53	1,11
Pomak	0,84	1,53	1,24
Broj obrtaja	1,21	1,49	0,94
Hlađenje/podmazivanje	1,07	1,09	1,7

Može se primetiti da se najviše prosečne vrednosti R_a dobijaju za središnji nivo (srednje vrednosti) numeričkih faktora.

Primer 6.8. (primer Box-Behnken dizajna)

S ciljem optimizacije postupka elektroerozivne obrade pri obradi cirkonijum oksida korišćen je Box-Behnken dizajn eksperimenta koji analizira uticaj ulaznih nezavisnih promenljivih (struja pražnjenja, dužina trajanja impulsa i koncentracija grafitnog praha) na izlaznu promenljivu - srednja aritmetička hrapavost obrađene površine R_a . Glavni razlog primene Box-Behnken dizajn eksperimenta je ograničenje variranja uticajnih parametara. Nivoi faktora koji su varirani u eksperimentu su dati u tabeli 6.18.

Tabela 6.18. Nivoi razmatranih faktora u primeru 6.8

Parametri	Nizak nivo	Srednji nivo	Visok nivo
Struja pražnjenja I_e u A	1	1.5	2
Dužina impulsa t_i u μs	42	86	130
Koncentracija grafitnog praha GR u g/l	0	4	8

Postupak kreiranja Box – behnken dizajna objašnjen je u poglavlju 6.4.4. Broj ponavljanja u centralnoj tački bio je 5, slika 6.63. Kreirani dizajn eksperimenta sa srednjim vrednostima aritmetičke hrapavosti (R_a u μm) prikazani su na slici 6.64. (prikazan je nerandomiziran eksperiment).

Create Response Surface Design: Designs

Number of center points:
☐ Default: 3
☒ Custom: 5

Number of replicates: 1
☐ Block on replicates

Number of blocks: 1

Help OK Cancel

Slika 6.63. Izbor pet ponavljanja za centralnu tačku u Box-behnken dizajnu

Box-Behnken Design			
Factors:	3	Replicates:	1
Base runs:	17	Total runs:	17
Base blocks:	1	Total blocks:	1
Center points:	5		

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	PtType	Blocks	Struja pražnjenja	Dužina impulsa	Koncentracija	Ra
1	1	1	2	1	1,0	42	4	5,89
2	2	2	2	1	2,0	42	4	8,99
3	3	3	2	1	1,0	130	4	7,83
4	4	4	2	1	2,0	130	4	12,74
5	5	5	2	1	1,0	86	0	7,75
6	6	6	2	1	2,0	86	0	14,96
7	7	7	2	1	1,0	86	8	7,75
8	8	8	2	1	2,0	86	8	12,85
9	9	9	2	1	1,5	42	0	9,04
10	10	10	2	1	1,5	130	0	12,89
11	11	11	2	1	1,5	42	8	9,21
12	12	12	2	1	1,5	130	8	10,55
13	13	13	0	1	1,5	86	4	8,21
14	14	14	0	1	1,5	86	4	8,61
15	15	15	0	1	1,5	86	4	9,02
16	16	16	0	1	1,5	86	4	8,88
17	17	17	0	1	1,5	86	4	8,62

Slika 6.64. Dizajn eksperimenta sa odzivom (R_a) za primer 6.8

Pri postavljanju modela prvo se uzima kvadratni model i dobijaju rezultati prikazani na slici 6.65. Iz ANOVA tablice prikazane na slici 6.65. može se zaključiti da, na osnovu p vrednosti, su svi

faktori statistički signifikantni, a na osnovu F vrednosti vidi se da je najuticajnije struja pražnjenja. Takođe, statistički je značajan i kvadrat koncentracije grafitnog praha. Međutim, vrednost **Lack-of-Fit** je statistički značajna i ovako postavljen model nije adekvatan iako je vrednost R -sq dosta zadovoljavajuća. Prema istraživanju iz koga su preuzeti podaci (Rodić, D. 2019. *Optimizacija procesa elektroerozivne obrade savremenih inženjerskih materijala*, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad), vrednost **Lack-of Fit** bi se mogla poboljšati (povećati vrednost p) ako bi broj ponavljanja u centralnoj tački bio veći.

Response Surface Regression: Ra versus Struja pražnjenja; Dužina impulsa; Koncentracija					
Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	p-Value
Model	9	87,4378	9,7153	24,94	0,000
Linear	3	68,6994	22,8998	58,78	0,000
Struja pražnjenja	1	51,6128	51,6128	132,47	0,000
Dužina impulsa	1	14,7968	14,7968	37,98	0,000
Koncentracija	1	2,2898	2,2898	5,88	0,046
Square	3	15,2313	5,0771	13,03	0,003
Struja pražnjenja*Struja pražnjenja	1	0,3783	0,3783	0,97	0,357
Dužina impulsa*Dužina impulsa	1	0,0466	0,0466	0,12	0,740
Koncentracija*Koncentracija	1	14,5628	14,5628	37,38	0,000
2-Way Interaction	3	3,5071	1,169	3	0,105
Struja pražnjenja*Dužina impulsa	1	0,819	0,819	2,1	0,190
Struja pražnjenja*Koncentracija	1	1,113	1,113	2,86	0,135
Dužina impulsa*Koncentracija	1	1,575	1,575	4,04	0,084
Error	7	2,7272	0,3896		
Lack-of-Fit	3	2,3429	0,781	8,13	0,035
Pure Error	4	0,3843	0,0961		
Total	16	90,165			
Model Summary					
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)		
0,624183	96,98 %	93,09 %	57,76 %		

Slika 6.65. Analiza varijanse za primer 6.8

Jednačina punog kvadratnog modela je:

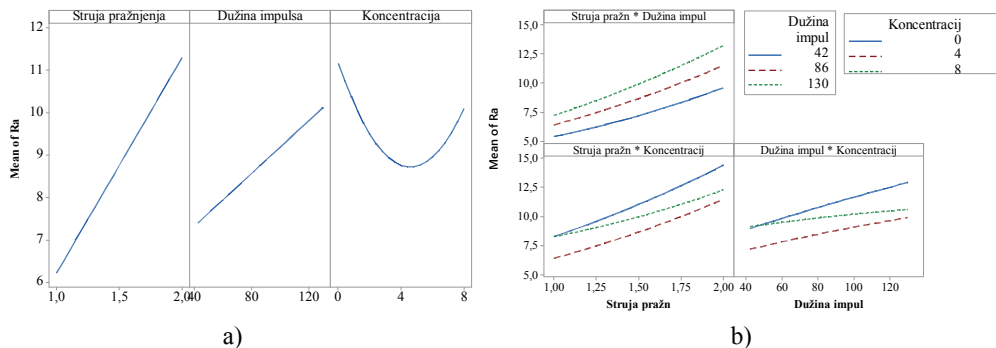
$R_a = 2.92 - 0.77 \times \text{Struja pražnjenja} + 0.237 \times \text{Dužina impulsa} - 0.361 \times \text{Koncentracija grafitnog praha} + 1.20 \times \text{Struja pražnjenja} \times \text{Struja pražnjenja} + 0.000054 \times \text{Dužina impulsa} \times \text{Dužina impulsa} + 0.1162 \times \text{Koncentracija grafitnog praha} \times \text{Koncentracija grafitnog praha} + 0.0206 \times \text{Struja pražnjenja} \times \text{Dužina impulsa} - 0.264 \times \text{Struja pražnjenja} \times \text{Koncentracija grafitnog praha} - 0.00357 \times \text{Dužina impulsa} \times \text{Koncentracija grafitnog praha}$

Dok je jednačina redukovano modela (model koji isključuje nesigifikantne uticaje):

$R_a = 0.88 + 5.080 \times \text{Struja pražnjenja} + 0.03091 \times \text{Dužina impulsa} - 1.069 \times \text{Koncentracija grafitnog praha} + 0.1169 \times \text{Koncentracija grafitnog praha} \times \text{Koncentracija grafitnog praha}$

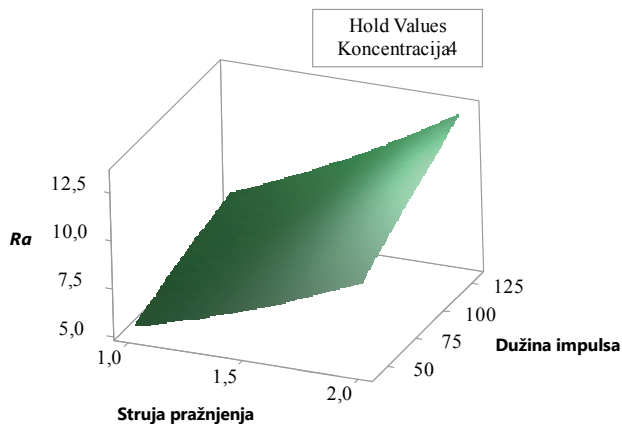
Vrednost $R\text{-sq}(pred)$ za redukovani model je 92,63 % dok je vrednost p za **Lack-of-Fit** još manja tj. 0.03.

Korišćenjem opcije **Stat > DOE > Response Surface > Factorial Plots** (koristi se neredukovani model) dobija se dijagram glavnih uticaja (slika 6.66.a) i dijagram interakcije (slika 6.66.b). Sa dijagrama glavnih efekata može se uočiti najjači efekat faktora struje pražnjenja koja, ako se povećava, znatno opada kvalitet odrađene površine (slično tumačenje je i za dužinu impulsa) dok se najbolji kvalitet dobija na srednjem nivou koncentracije grafitnog praha. Na slici b) vidi se nepostojanje interakcije između razmatranih faktora što je dobijeno i analizom varijanse.



Slika 6.66. a) Dijagram glavnih efekata b) dijagram interakcije

Na slici 6.67. predstavljen je površinski dijagram (odzivna površina) koji prikazuje promenu vrednosti odziva u odnosu na promene struje pražnjenja i dužine impulsa (vrednost koncentracije je na srednjem nivou).



Slika 6.67. Površinski dijagram za primer 6.8

Ako se želi vršiti optimizacija može se koristiti opcija **Stat > DOE > Response Surface > Factorial Plots > Response Optimizer** u kojoj se na bazi ciljane vrednosti (u ovom slučaju je najmanja vrednost) vrši izbor najoptimalnijih vrednosti nivoa razmatranih faktora.

6.5. Taguči dizajn eksperimenta

Taguči plan eksperimenta je prvi predstavio Geniči Taguči (*Genichi Taguchi*) i koristi se za izvođenje eksperimenata sa visokom efikasnošću u cilju smanjenja eksperimentalnih troškova. Glavna ideja Tagučijeve metodologije je primena tehnika planiranja eksperimenta s ciljem definisanja nivoa kontrolisanih faktora koji čine proces robusnim uz prisutnost nekontrolisanih faktora (šumova). Pri tome prisutni šumovi imaju velik uticaj na odziv procesa, a nije ih moguće kontrolisati ili je ekonomski prezahtevno da se održavaju na određenoj konstantnoj vrednosti. Šumovi su glavni razlog pojave varijacije u sistemu.

Eksperimenti se sprovode na način da se utvrdi raspon varijabilnosti nastao kao posledica variranja kontrolisanih faktora i nekontrolisanih faktora (šumova). Taguči preporučuje korišćenje ortogonalne matrice plana eksperimenta, potpuni plan eksperimenta, jedan za svaki od dve grupe faktora (kontrolisane promenljive i šumovi). Za razliku od tradicionalnog pristupa koji podrazumeva da se greška distribuira nasumično unutar plana, Tagučijev plan omogućuje analizu uticaja greške (šumova) na odziv. Sa manje eksperimenata Taguči dizajn određuje najbolju kombinaciju ulaznih faktora kroz ortogonalne nizove. Ortogonalni niz se označava $La(b)^c$, gde je a broj kombinacija faktora, b je broj nivoa faktora a c predstavlja broj faktora u eksperimentu. Umesto punog eksperimentalnog dizajna, broj potrebnih eksperimenata se drastično smanjuje na bazi ortogonalnih nizova. Izbor ortogonalnih redova se bira u zavisnosti od broja faktora i nivoa svakog faktora u eksperimentu. Taguči dizajn eksperimenta prati standardni raspored, počevši od identifikacije promenljivih glavne funkcije/odziva nakon čega sledi izbor funkcije cilja (poznata kao S/N odnos).

S/N odnos (*signal to noise*) se koristi za procenu robusnosti kvaliteta proizvoda/procesa. Veći S/N označava veću robusnost kvaliteta proizvoda/procesa. Tri najčešće korišćene funkcije cilja su: „najmanje je najbolje“, „najveće je najbolje“ i „nominalno je najbolje“. Izrazi za ove tri funkcije cilja su:

1. Nominalno je najbolje, jednačina 6.21:

$$S/N_S = -10 \times \log_{10} \left(\frac{\bar{y}^2}{\bar{s}^2} \right). \quad (6.21.)$$

2. Najmanje je najbolje, jednačina 6.22:

$$S/N_S = -10 \times \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (6.22.)$$

3. Najveće je najbolje, jednačina 6.23:

$$S/N_S = -10 \times \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right), \quad (6.23.)$$

gde je n broj opservacija, y_i je eksperimentalni rezultat i $\bar{y}$ i s su srednja vrednost i odstupanje svih opservacija u svakoj kombinaciji. Analiza varijanse je zajednička procedura u Taguči metodi i koristi se za procenu eksperimentalnih grešaka za kontrolne faktore. Ukupna suma kvadrata, pojedinačne sume kvadrata i F test se izračunavaju za određivanje efekata za svaki kontrolni faktor. Veći F odnos predstavlja veći efekat kontrolnih faktora. Jednačine 6.24. i 6.25. se koriste kod Taguči metode:

$$S/N_S = \sum_{j=1}^n (y_{j=I}^2 - CF) \text{ -ukupna suma kvadrata} \quad (6.24.)$$

$$CF = \frac{\left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^2}{N} \text{ -korektivni faktor} \quad (6.25.)$$

gde je N ukupan broj eksperimenata. Stepni slobode df se određuju prema uputstvima opisanih kod punih faktornih eksperimenata, tj. broj nivoa faktora umanjen za jedan. Jednačina za sumu kvadrata za glavni efekat faktora A , na p nivoa, m opservacija za svaki nivo je:

$$SS_A = \frac{(A_1)^2 + (A_2)^2 + \dots + (A_p)^2}{m} - CF \quad (6.26.)$$

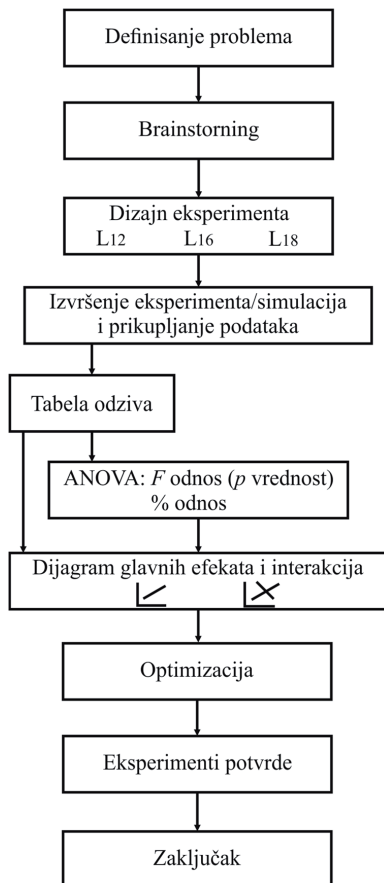
gde je A_i ukupan (y_i) koji uključuje faktor A_i . Sredina kvadrata, MS je jednaka:

$$MS = \frac{SS}{df} \quad (6.27.)$$

Suma kvadrata, SS' je jednaka:

$$SS' = SS - MS_{\text{udružena greška}} \times df \quad (6.28.)$$

Dijagram toka Tagučić plana eksperimenta prikazan je na slici 6.68.

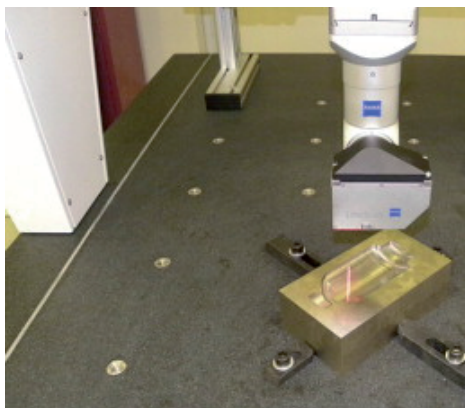


Slika 6.68. Dijagram toka Tagučić plana eksperimenta

6.5.1. Primer u Minitabu

U postupku 3D digitalizacije radnog predmeta u cilju dobijanja što tačnijeg CAD modela korišćena je koordinatna merna mašina sa beskontaktnim linijskim senzorom. Postoji nekoliko uticajnih faktora koji utiču na tačnost dobijenog modela. Primenom Tagučić plana eksperimenta koji

je uključio četiri faktora izvršena je optimizacija ulaznih faktora u cilju dobijanja „najboljih“ rezultata 3D skeniranja. Postupak merenja (digitalizacije) je prikazan na slici 6.69.



Slika 6.69. Postupak digitalizacije složene površine sa line-scan senzorom

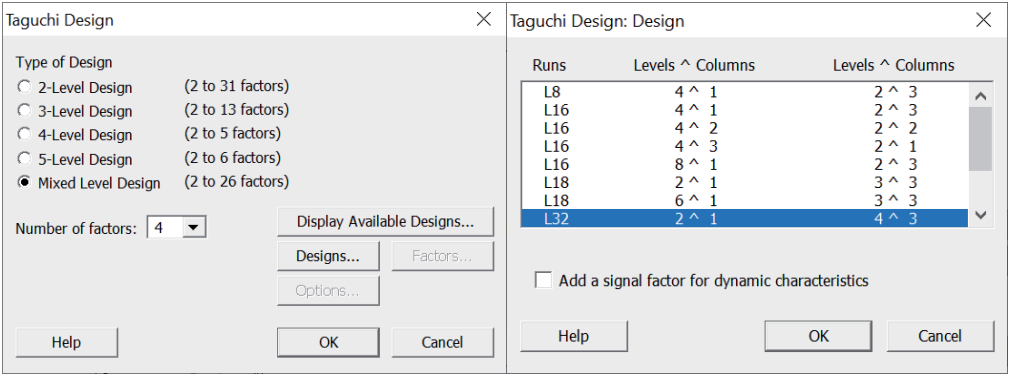
Razmatrani faktori i njima pripadajući nivoi su prikazani u tabeliu 6.18.

Tabela 6.19. Faktori i njima pripadajući nivoi za Taguchi plan eksperimenta

Ime	Faktor	Broj nivoa	Vrednost
Redukcija šuma	A	2	1; 2
Broj tačaka u %	B	3	0.125; 0.25; 0.5; 1
Broj trouglova u %	C	4	0.125; 0.25; 0.5; 1
Kvalitet uzorkovanja/performance	D	4	1; 2; 3; 4

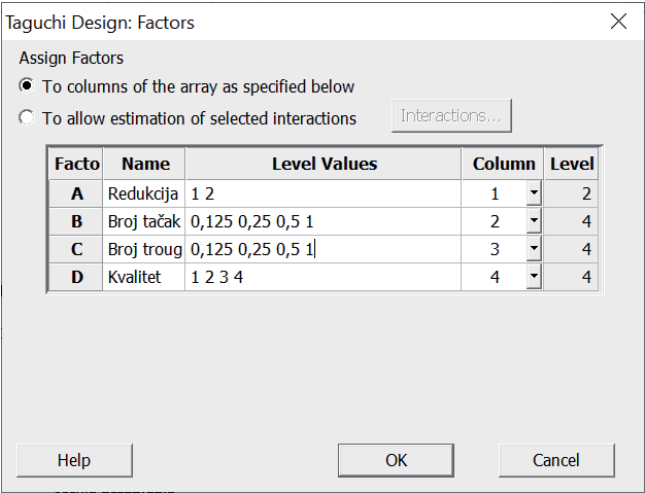
Faktor „Redukcija šuma“ predstavlja kompenzaciju za greške skenera (šum). U redukciji šuma tačke se premeštaju na statistički ispravne položaje. Šum može uzrokovati da podaci oblaka tačaka glatkih krivih postanu grubi. Faktor „Broj tačaka“ je broj tačaka (gustina) u oblaku tačaka i može biti koristan u određivanju tačnosti CAD modela. Obeležava se u procentima (%) i ima 4 nivoa. Vrednosti 0,125 , i 0,25 predstavljaju 12,5 %, 2,5 % i tako dalje. 1 predstavlja 100 % i sadrži milion tačaka. Faktor „Broj trouglova“ predstavlja broj trouglova u rezultujućem modelu poligona. Broj trouglova se takođe iznosi u procentima (%). Faktor „Kvalitet uzorkovanja/performance“ selektuje željene kompromise između brzine i kvaliteta dobijene poligonalne mreže. Nivo podešen na 1 znači da softver radi brže i pravi kompromis u pogledu kvaliteta. Kreiranje eksperimentalnog dizajna se vrši prema sledećem, *Stat > DOE > Taguchi > Create Taguchi Desing*.

Zatim se vrši izbor eksperimenta gde se odabere broj faktora 4 (*Number of factors*) i *Mixed level desing* zato što je različit broj nivoa faktora, i u opciji *Design* se obabere dizajn *L32* (odgovara broju faktora i nivoa), slika 6.70.



Slika 6.70. Izbor dizajna Tagučijevog plana eksperimenta

U opciji *Factors* dodele se imena faktorima i njima pripadajućim nivoima, slika 6.71.



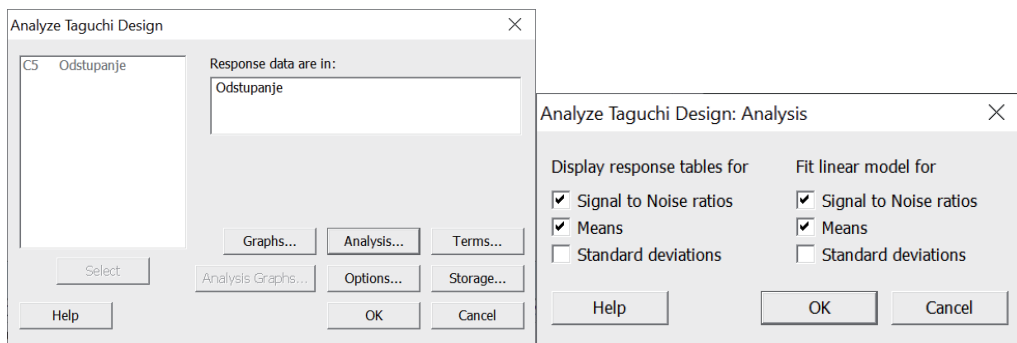
Slika 6.71. Dodeljivanje imena faktorima i nivoima

U tabeli 6.19. prikazan je Tagučići dizajn eksperimenta sa odzivom, tj. tačnost površine koja se meri kao odstupanje izmerenog dela od CAD modela izraženo u μm .

Tabela 6.20. *Taguči plan eksperimenta sa razmatranim odzivom*

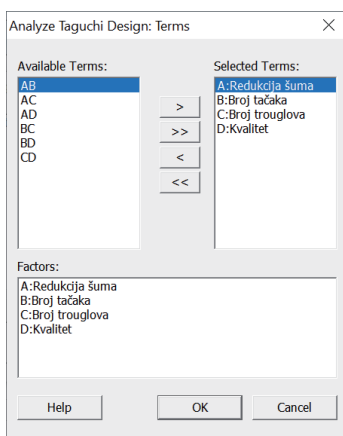
Redukcija šuma	Broj tačaka	Broj trouglova	Kvalitet uzorkovanja	Odstupanje
1	0,125	0,125	1	40,745
1	0,125	0,250	2	34,29
1	0,125	0,500	3	18,459
1	0,125	1,000	4	20,181
1	0,250	0,125	1	28,893
1	0,250	0,250	2	27,151
1	0,250	0,500	3	19,582
1	0,250	1,000	4	18,781
1	0,500	0,125	2	26,656
1	0,500	0,250	1	16,332
1	0,500	0,500	4	24,251
1	0,500	1,000	3	20,07
1	1,000	0,125	2	32,363
1	1,000	0,250	1	16,209
1	1,000	0,500	4	31,225
1	1,000	1,000	3	25,163
2	0,125	0,125	4	33,883
2	0,125	0,250	3	19,113
2	0,125	0,500	2	20,371
2	0,125	1,000	1	21,734
2	0,250	0,125	4	30,122
2	0,250	0,250	3	19,148
2	0,250	0,500	2	15,891
2	0,250	1,000	1	26,792
2	0,500	0,125	3	22,526
2	0,500	0,250	4	12,321
2	0,500	0,500	1	16,857
2	0,500	1,000	2	19,492
2	1,000	0,125	3	27,192
2	1,000	0,250	4	18,9
2	1,000	0,500	1	9,072
2	1,000	1,000	2	16,271

Da bi se procenili efekti faktora i njihovih interakcija na odziv, sprovodi se Taguči analiza S/N (najmanje je najbolje) odnosa i srednjih vrednosti prema sledećem: **Stat > DOE > Taguchi > Analyze Taguchi Desing** u polje **Response** se obere odziv (odstupanje), u polju **Graphs** se odabere **Signal to Noise Ratio** i **Means** a u **Analysis** se odabere prema slici 6.72.



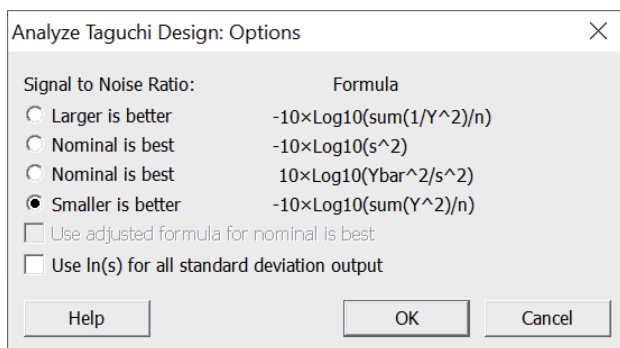
Slika 6.72. Izbor odziva u Taguchi planu eksperimenta i izbor u *Analysis* opciji

Zatim se u opciji *Terms* odaberu svi raspoloživi faktori i njihove interakcije, slika 6.72.



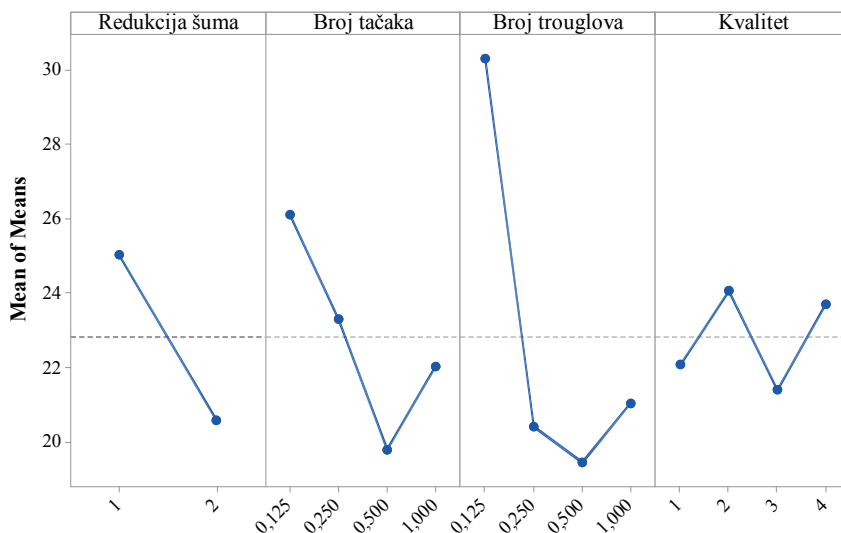
Slika 6.73. Izbor faktora i interakcija koji utiču na kreiranje modela

U *Options* se odabere *Smaller is better* i *OK*, slika 6.74.



Slika 6.74. Izbor funkcije cilja u Minitabu

Svrha ove analize je da se odrede faktori i njihove interakcije koji imaju signifikantne efekte na proces rekonstrukcije površine. Ovo je prikazano na slici 6.75. na kojoj nivo 3 (50 % tačaka) faktora B, nivo 3 (50 % broja trouglova) faktora C, i nivo 2 faktora A (redukcija šuma) je najpovoljnije za postizanje najveće tačnosti rekonstruisanog CAD modela.



Slika 6.75. Dijagram glavnih efekata srednjih vrednosti

Slika 6.76. ilustruje *S/N* odnos (najmanje je najbolje) i pokazuje da je faktor C najuticajniji, zatim sledi faktor B. Faktor D je najmanje signifikantan.

Level	Redukcija šuma	Broj tačaka	Broj trouglova	Kvalitet uzorovanja
1	-27,65	-27,93	-29,51	-26,11
2	-25,86	-27,13	-25,81	-27,29
3	-25,72	-25,33	-26,53	
4	-26,24	-26,37	-27,08	
Delta	1,79	2,22	4,18	1,18
Rank	3	2	1	4

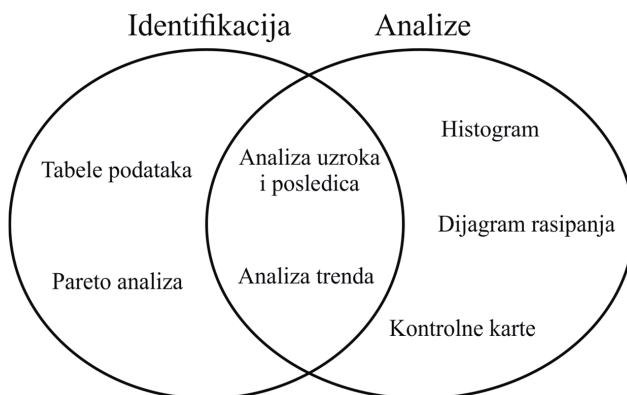
Slika 6.76. *S/N* odnos (najmanje je najbolje)

7. ALATI KVALITETA

Kako je rečeno na početku, osnova za donošenje odluke o kvalitetu procesa ili proizvoda je rezultat merenja. Jednostavno rečeno, rezultat merenja je pokazatelj kvaliteta proizvoda i/ili procesa. Ako se, na osnovu rezultata merenja, ustanovi da kvalitet nije zadovoljavajući postoje metode i tehnike koje se koriste u cilju poboljšanja. Metode i tehnike koje se koriste u tu svrhu nazivaju se alati kvaliteta. Postoji sedam osnovnih alata kvaliteta koji se mogu koristiti u cilju rešavanja problema poslovanja i poboljšanja procesa ili proizvoda. Prvi koji je predstavio sedam osnovnih alata kvaliteta bio je dr Kaoru Işikava (*Kaoru Ishikawa*) 1968. godine u publikaciji „*Gemba no QC Shuho*“ koja opisuje upravljanje kvalitetom kroz tehnike i prakse za japanske firme. Sedam osnovnih alata za kontrolu, koje je predstavio Işikava, su:

1. Kontrolni listovi
2. Kontrolni dijagrami (analiza trenda u podacima)
3. Histogrami
4. Pareto dijagram
5. Dijagram uzročno-posledičnih veza (Işikava dijagram)
6. Scatter plot – dijagram rasipanja
7. Kontrolne karte

Na slici 7.1. prikazan je odnos između sedam osnovnih alata kvaliteta i njihova upotreba za identifikaciju i analizu pobošljanja kvaliteta.



Slika 7.1. Sedam alata za kontrolu kvaliteta

Histogram i dijagram rasipanja su analizirani kod grafičkog predstavljanja podataka. Minitab nudi nekoliko grafičkih alata koji pomažu da se istraže i otkriju problemi sa kvalitetom i unaprede postojeći proces, i u nastavku će biti obrađeni sledeći alati kvaliteta:

1. Kontrolni dijagrami
2. Pareto dijagram
3. Iškavin dijagram
4. Dijagram prikaza uticaja više promenljivih

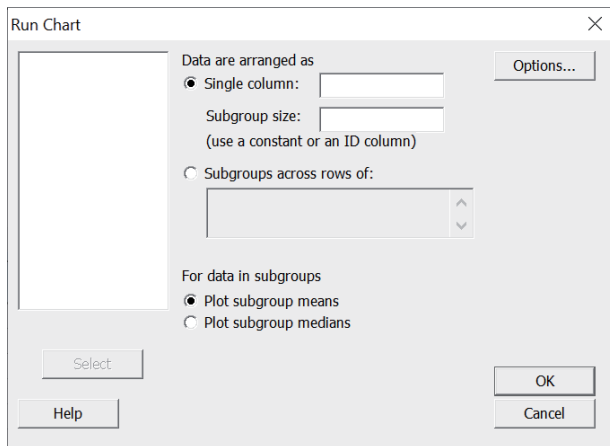
Iako dijagram prikaza uticaja više promenljivih ne spada u osnovne alate kvaliteta veoma je korisna tehnika u otkrivanju uticaja faktora na odzivnu karakteristiku bez da se sprovede određeni dizajni eksperimenta koji su objašnjeni u predhodnom poglavlju. Pored dijagrama uticaja više promenljivih Minitab nudi još nekoliko alata kvaliteta koji ne spadaju u osnovne, a u sledećem poglavlju će se detaljno opisati studija mernih sistema.

7.1. Kontrolni dijagrami

Kontrolni dijagram (eng. *Run Chart*) se koristi za evidenciju trenda u izmerenim podacima u procesu, i sprovede se dva testa za neslučajno ponašanje. Kontrolni dijagrami prikazuju sva individualna posmatranja u odnosu na podgrupe, i crtaju horizontalnu referentnu liniju na medijani. Kada je veličina podgrupe veća od 1, kontrolni dijagram takođe crta srednje vrednosti ili medijane i povezuje ih sa linijama. Neslučajno ponašanje se može opisati preko trenda (opadajući ili rastući), oscilacija, mešanja i/ili grupisanja u izmerenim podacima. Ovo sugeriše da je primećena varijacija nastala zbog „posebnog razloga“ koji ne karakterišu razmatrani sistem i, ako se detektuju, mogu se korigovati. Zajednički uzrok varijacija, na drugoj strani, je varijacija koja je svojstvena procesu ili je prirodan deo procesa. Proces je pod kontrolom samo onda kada samo zajednički uzroci (bez specijalnih uzroka) utiču na izlaz procesa.

Kontrolni dijagram se može koristiti nad pojedinačnim posmatranjima ili podacima u podgrupama. Podaci u podgrupama mogu biti struktuirani u pojedinačne kolone ili u redove sa nekoliko kolona. Ako su podgrupe nejednake veličine, podgrupe se unose u pojedinačnu kolonu, a zatim se podesi druga kolona podgrupe indikatora. Za kreiranje kontrolnog dijagrama u Minitabu koristi se sledeće:

1. Izbor opcije **Stat > Quality Tools > Run Chart** (slika 7.2)



Slika 7.2. Kreiranje kontrolnog dijagrama u Minitabu

2. Mogu se izabrati sledeće opcije:

- Kada su podgrupe ili individualna posmatranja u jednoj koloni, unosi se kolona sa podacima u jednu kolonu. U polju **Subgroup size** unosi se veličina podgrupe ili indikatori kolone podgrupe. Za individualna posmatranja, unosi se veličina podgrupe 1
- Kada su podgrupe u redovima, serije kolona u podgrupama se unose preko reda, zatim

3. **OK**

Pri kreiranju kontrolnog dijagrama mogu se koristiti sledeće opcije:

- **For data in subgroups** - Dijagram podgrupa medijana umesto podgrupa srednjih vrednosti
- **Options** - Zamena podrazumevanog naziva dijagrama sopstvenim nazivom

7.1.1. Kontrolni dijagram normalnog trenda

Normalan trend u izmerenim podacima je poželjan scenario za posmatrani proces. Podaci u tom slučaju će imati slučajno ponašanje i to predstavlja uobičajno stanje procesa. Za takav proces se može reći da je u stanju kontrole i da ne postoje neki sistematski efekti koji deluju na njega. Ako samo zajedničke varijacije postoje u procesu, podaci će imati slučajno ponašanje. Normalan trend sa izlaznim podacima za podatke procesa je prikazan u tabeli 7.1. U tabeli 7.1. broj opservacija (medijana i gore ili dole) i očekivani broj opservacija predstavljaju karakteristiku normalnog trenda koji uključuje slučajnu raspodelu tačaka, stvarni broj opservacija treba da bude blizu očekivanom broju opservacija; približne p vrednosti predstavljaju testiranje za neslučajan trend sa pragom značajnosti 0.05. Pošto su sve p vrednosti veće od 0.05, to ukazuje da podaci dolaze iz slučajne raspodele. Prva dva testa za slučajne podatke su zasnovani na broju opservacija vezanih za medijanu

a druga dva testa su zasnovani na broju opservacija gore ili dole. Tabela 7.2. ilustrije moguće scenarije pri testiranju.

Tabela 7.1. Podaci i grafički prikaz koji pokazuju normalan trend u izmerenim podacima

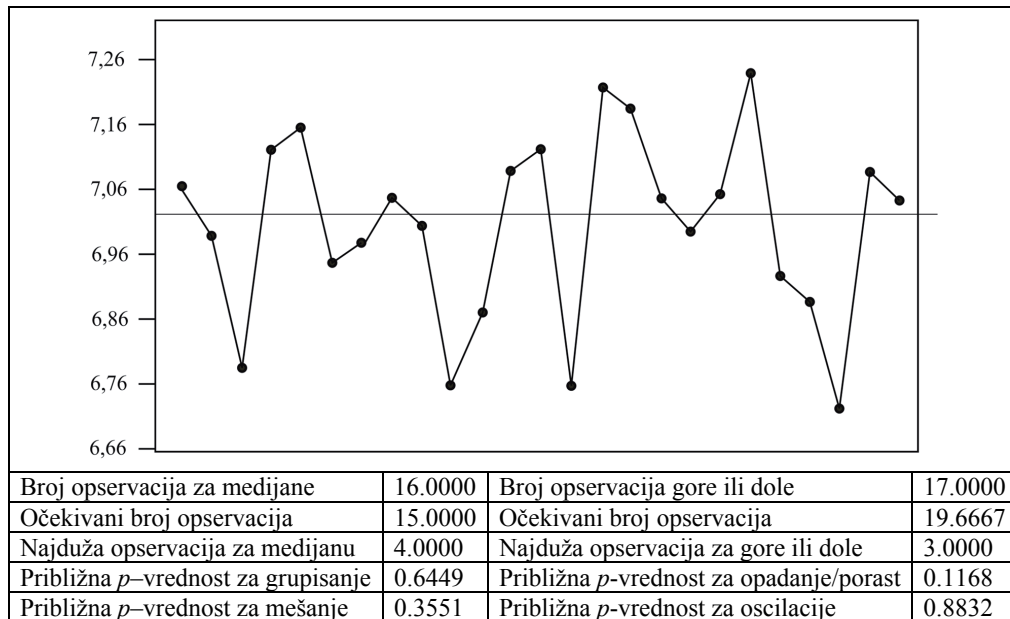


Tabela 7.2. Mogući scenariji pri testiranju preko kontrolnog dijagrama

Test za slučajan uzorak	Uslov	Ukazuje na
Broj opservacija za medijanu	Više posmatranih opservacija od očekivanih	Mešoviti podaci iz dve grupacije (populacije)
	Manje posmatranih opservacija od očekivanih	Grupisanje podataka
Broj opservacija za gore ili dole	Više posmatranih opservacija od očekivanih	Oscilacije – podaci variraju gore i dole brzo
	Manje posmatranih opservacija od očekivanih	Podaci su u nekom trendu

Oba testa su zasnovana na individualnim opservacijama kada je veličina podgrupe jednaka 1. Kada je veličina podgrupe veća od 1, testovi su zasnovani na bilo kojoj srednjoj vrednosti podgrupe ili medijanama podgrupa.

Za oba testa, nulta hipoteza je da su podaci u slučajnom rasporedu. Kontrolni dijagram konvertuje posmatrane vrednosti opservacija u statistički test koji je aproksimativno standardno normalan te se koristi normalna raspodela za dobijanje p vrednosti. Dve p vrednosti odgovaraju jednostranoj verovatnoći pridružene sa statističkim testom. Kada je p vrednost manja od α vrednosti, tada se odbacuje hipoteza o slučajnosti. α , kao i do sada, predstavlja vrednost verovatnoće da se može

pogrešno odbaciti hipoteza o slučajnosti kada je hipoteza istinita. Radi ilustracije u primerima, za prag značajnosti se usvaja $\alpha=0,05$.

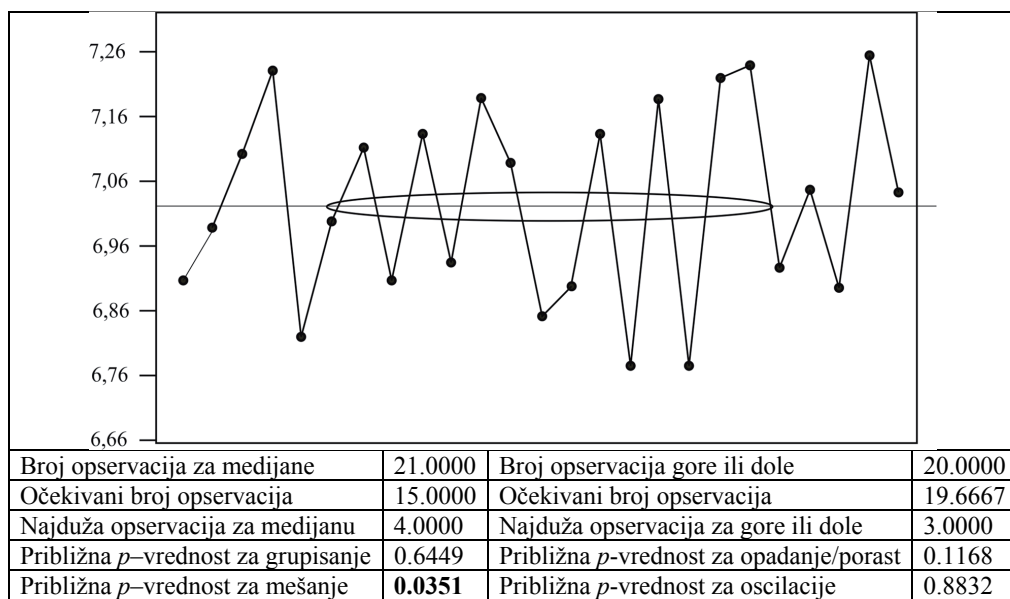
7.1.2. Interpretacija testa za broj opservacija za medijanu

Ova prva grupa testova je zasnovana na ukupnom broju opservacija koji se javljaju iznad ili ispod medijane. Opservacija, u ovom slučaju, je jedna ili više uzastopnih tačaka na istoj strani medijane. Kada su tačke spojene linijom, opservacija se završava kada linija preseca medijanu. Nova opservacija počinje sa sledećom nacrtanom tačkom. Test za broj opservacija za medijanu je osetljiv na dva tipa neslučajnog ponašanja – mešanje i grupisanje. Slučaj kada je posmatrani broj opservacija statistički veći od očekivanog broja opservacija ukazuje na mešanje (koje odgovara desnom regionu odbacivanja), dok, posmatrani broj opservacija koji je statistički manji od očekivanog broja opservacija ukazuje na grupisanje (što odgovara levoj strani regiona odbacivanja).

Mešanje

U tabeli 7.3. dat je kontrolni dijagram koji prepoznaje sistematski efekat-mešanje sa numeričkim vrednostima koji potvrđuju isto.

Tabela 7.3. Podaci i grafički prikaz koji pokazuju mešanje u izmerenim podacima

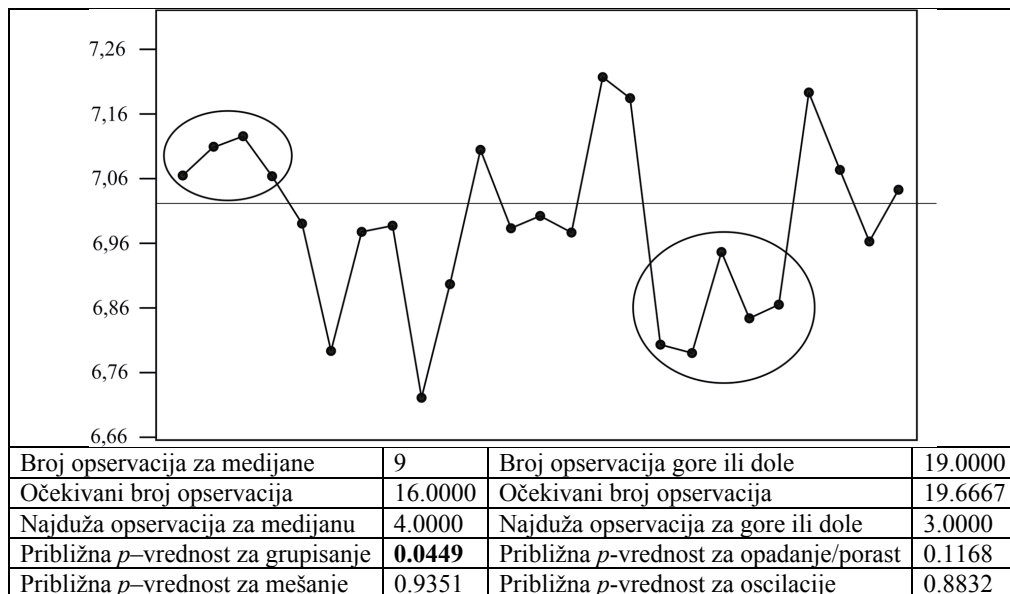


Sa slike u tabeli 7.3. se može zaključiti da je mešanje karakteristično odsustvo tačaka blizu centralne linije. Trend mešanja obično indicira kombinaciju tačaka iz dve populacije, ili dva procesa koji rade sa različitim nivoima. Takođe, p vrednost za mešanje je manja od 0,05 tako da se odbacuje nulta hipoteza o slučajnosti i alternativna hipoteza sugerise da podaci dolaze iz različitih procesa.

Grupisanje

U tabeli 7.4. dat je kontrolni dijagram koji prepoznaje sistematski efekat-grupisanje sa numeričkim vrednostima koje potvrđuju isto.

Tabela 7.4. Podaci i grafički prikaz koji pokazuju grupisanje u izmerenim podacima



Grupisanje može da ukazuje na varijacije zbog specijalnih uzroka, kao što su problemi merenja, ili uzorkovanje iz loše grupe delova. U tabeli se može videti da je vrednost p manja od 0.05, tako da se odbija nulta hipoteza o slučajnosti i prisutno je grupisanje.

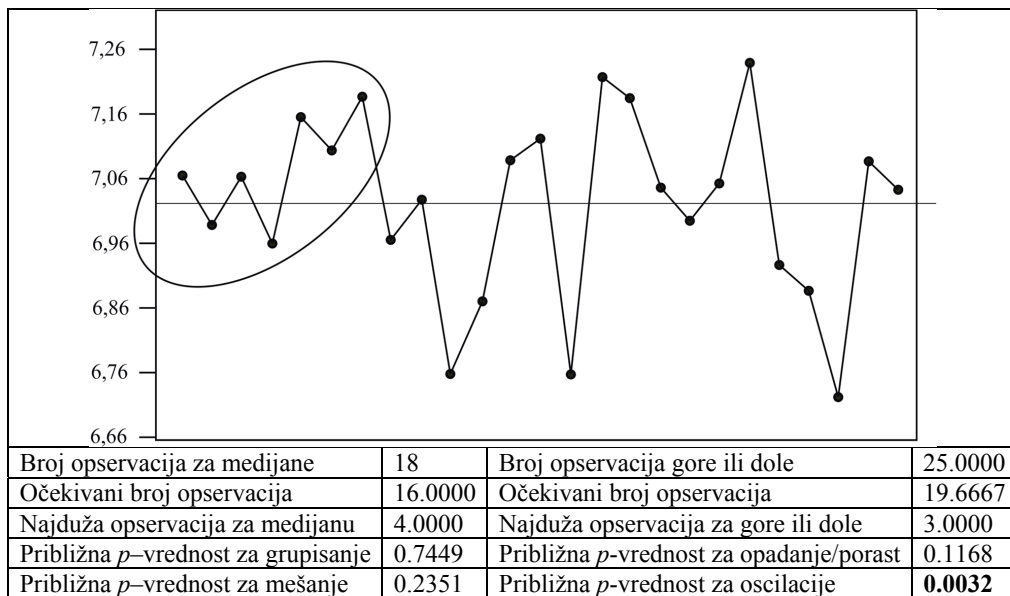
7.1.3. Interpretacija testa za broj opservacija za gore ili dole

Drugi test je zasnovan na broju opservacija gore ili dole. Opservacija, sa ovim testom, je jedna ili više uzastopnih tačaka u istom pravcu. Nova opservacija počinje svaki put kada postoji promena u pravcu (silazno ili uzlazno) u nizu podataka. Na primer, kada je prethodna vrednost manja, gornja opservacija se nastavlja sve dok je prethodna vrednost veća od sledeće tačke, tada počinje opservacija dole. Test za broj opservacija gore ili dole je osetljiv na dva tipa neslučajnih ponašanja – trend (opadajući ili rastući) i oscilacija u rezultatima. Ako je posmatrani broj opservacija statistički veći od očekivanog broja opservacija zastupljeno je oscilovanje (što odgovara desnom regionu odbijanja), i ako je posmatrani broj opservacija koji su statistički manji od očekivanog broja opservacija zastupljen je trend (opadajući ili rastući) u rezultatima merenja (koji odgovara levom regionu odbacivanja).

Oscilovanje

U tabeli 7.5. dat je kontrolni dijagram koji prepoznaje sistematski efekat-oscilovanje sa numeričkim vrednostima koji potvrđuju isto.

Tabela 7.5. Podaci i grafički prikaz koji pokazuju oscilovanje u izmerenim podacima

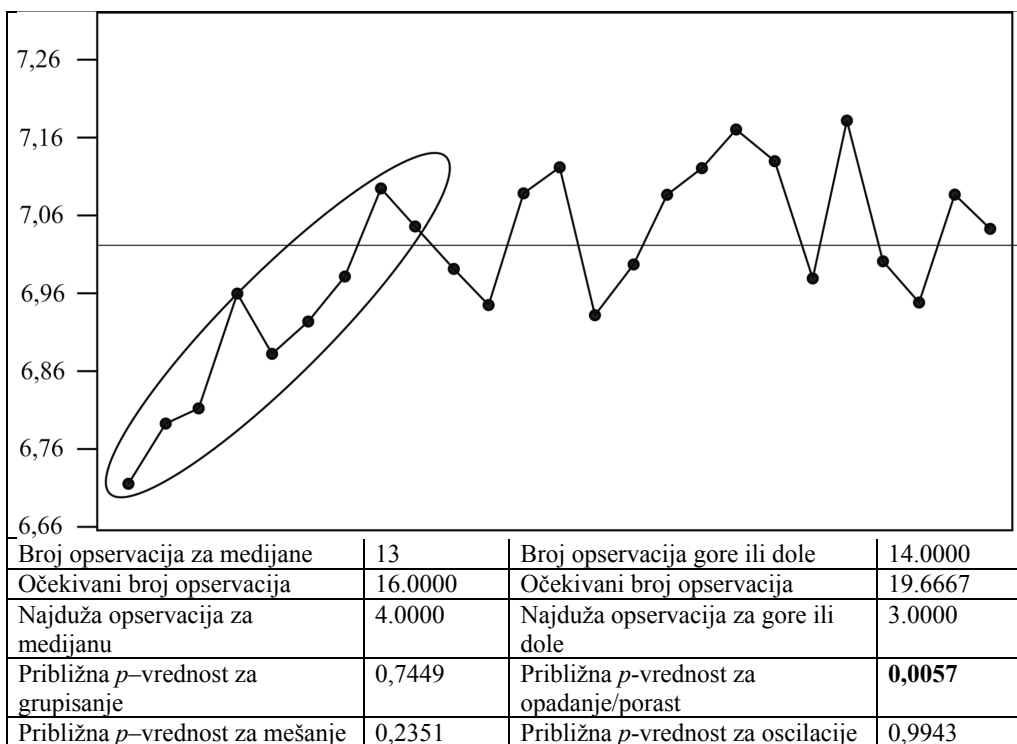


Na slici u tabeli 7.5. može se primetiti oscilovanje rezultata koje se javlja kada podaci variraju gore dole brzo, i pokazuju da proces nije stabilan. Pošto je p vrednost za oscilovane manja od 0.05, odbija se nulta hipoteza o slučajnosti i prisutno je oscilovanje.

Trend (opadajući ili rastući)

U tabeli 7.6. dat je kontrolni dijagram koji prepoznaje sistematski efekat-rastući trend sa numeričkim vrednostima koji potvrđuju isto.

Tabela 7.6. Podaci i grafički prikaz koji pokazuju rastući trend u izmerenim podacima



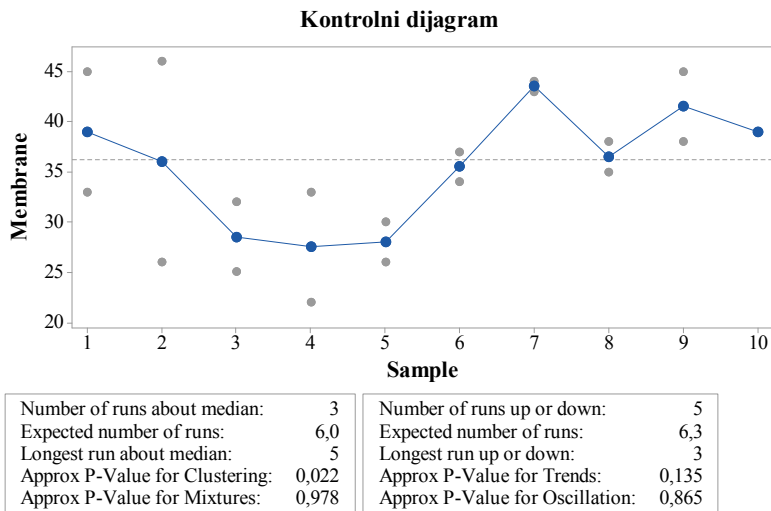
Sa slike u tabeli 7.6. se može zaključiti da u podacima postoji rastući trend. Ovo može da posluži kao upozorenje da proces uskoro ide van kontrole, i može biti zbog faktora kao što je npr. pohabanost alata, periodična rotacija operatera, itd. Takođe, vrednost p je manja od 0,05, što takođe sugerise pojavu trenda u rezultatima.

7.1.4. Primer kontrolnog dijagrama u Minitabu

U preduzeću koje se bavi proizvodnjom uređaja za merenje zračenja, inženjer u kontroli kvaliteta želi da ispita da li postoji zavisnost između rezultata merenja i tipa membrane koja se koristi u uređajima za merenja zračenja. Analiziraju se podaci merenja dvadeset testiranih uređaja (u grupama po dva) sakupljenih u eksperimentalnoj komori. Nakon svakog testa, snima se količina zračenja koju svaki uređaj meri. Za dobijene rezultate merenja, odlučeno je da se konstruiše kontrolni dijagram da proceni varijaciju u rezultatima merenja. Postupak u Minitabu je sledeći:

1. U padajućem meniju aktivira se **File > Open Worksheet**.
2. Zatim se aktivira ikonica **Look in Minitab Sample Data folder** i izabere se datoteka **Radon.MTW**
3. Zatim **Stat > Quality Tools > Run chart**

4. U *single column*, uneti *Membrane*
5. U *Subgroup size* uneti 2
6. **OK**



Slika 7.3. Kontrolni dijagram iz primera

Kontrolni dijagram za dati primer je prikazan na slici 7.3. Na osnovu p vrednosti za grupisanje koja je manja od 0,05 može se zaključiti da specijalni uzroci pogađaju proces, i treba istražiti moguće izvore. Grupisanje može ukazati na probleme vezane za uzorkovanje ili merenje.

7.2. Pareto dijagram

Pareto dijagrami su vrsta grafičkog prikaza podataka u kojima horizontalna osa predstavlja kategorije od interesa, umesto kontinuirane skale, poredane od najveće do najmanje. Pareto dijagram se koristi za indentifikovanje defekata sa najvećom frekvencijom pojavljivanja, najčešćim uzrocima defekata (grešaka) ili najčešćim uzrocima žalbi kupaca. Kategorije su često „defekti“ predstavljeni na y osi i uglavnom su izraženi u procentima. Redanjem stubaca od najvećeg do najmanjeg, Pareto pomaže da se odrede koji defekti obuhvataju „vitalno malo“ i kojih je „trivijalno mnogo“. Linija kumulativnih procenata pomaže ovoj osudi dodavanjem činicala svake kategorije. Pareto dijagram je nazvan prema Vilfredu Paretu (*Vilfredo Pareto*) i njegovom principu „80/20“ (eng. „80/20 rule“). Ovo pravilo se može tumačiti na sledeći način, npr: 20 posto ljudi kontroliše 80 % bogatstva; 20 posto kupaca stvara 80 posto žalbi.

Pareto dijagram ne uzima u obzir samo frekvenciju defekata, već i njihovu važnost. Ova vrsta dijagrama može prikazati ozbiljnost defekata, troškove ili bilo šta drugo što se želi pratiti. Recimo,

ako se prikupljeni podaci posmatraju u odnosu na frekvenciju pojavljivanja nekog defekta i troškova popravke, ovaj alat kvaliteta može uticati na promenu prioriteta/redosleda u otklanjanju pojedinačnih uzročnika lošeg kvaliteta. Pareto dijagram se izrađuje na temelju sprovedene ABC analize prema kojoj se uzroci razvrstavaju prema frekvenciji te se tim redosledom trebaju i rešavati. Prvo je potrebno rešiti se uzročnika A koji ima najveći uticaj, zatim B, C i tako redom. Pri tome se ne rešavaju svi, nego kao što je već rečeno samo onih koji kumulativno sadrže 80 % posto svih grešaka

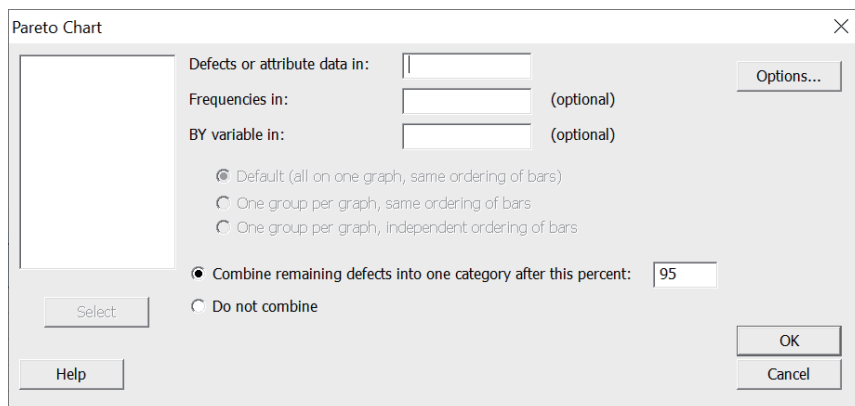
Pri konstrukciji Pareto dijagrama sledeće stvari treba uzeti u obzir:

1. Prikupljanje podataka tokom kratkog vremenskog perioda, posebno od nestabilnog procesa, može dovesti do pogrešnih zaključaka. Pošto podaci nisu pouzdani, može se stvoriti pogrešna ideja o raspodeli defekata i uzročnika. Kada proces nije u stanju statističke kontrole, uzroci mogu biti nestabilni i „vitalno malo“ problema se može promeniti od nedelje do nedelje. Kratki vremenski periodi nisu reprezentativni za posmatranje procesa
2. Prikupljanje podataka tokom dugog vremenskog perioda može uključivati promene. Potrebno je ispitati podatke na grupisanje i promene u problematici tokom raspodele vremena
3. Odabir kategorija je ključan. Ako Pareto analiza ne daje korisne rezultate, potrebno je osigurati da kategorije defekata budu smislene i da kategorija „ostalo“ (*other*) nije previše velika.
4. Odabir kriterijuma za procenu je ključan. Na primer, troškovi mogu biti korisna mera za prioritizaciju nego što je broj pojavljivanja, posebno u slučajevima kada se troškovi defekata značajno razlikuju
5. Fokusiranjem na probleme sa najvećom frekvencijom pojavljivanja treba smanjiti ukupan broj radnih predmeta kojima je potrebna dorada/popravka. Fokusiranjem na probleme sa najvišim troškovima bi trebalo povećati finansijsku dobit
6. Cilj Pareto analize je dobijanje maksimalne nagrade za trud uložen na kvalitet, ali to ne znači da problemi (defekti) koji su mali i lako se otklanjaju trebaju biti zanemareni dok god se veći problemi ne reše.

Kada se želi kreirati Pareto dijagram u Minitabu, podaci se mogu strukturisati na jedan od dva načina:

- kao jedna kolona sirovih podataka, gde svaka opservacija je slučajan tip defekta, ili
- kao dve kolone: jedna kolona imena defekata i odgovarajuća kolona brojčanih vrednosti.

Za kreiranje Pareto dijagrama u Minitabu koristi se sledeći niz opcija: **Stat > Quality Tools > Pareto Chart** i dobija se prozor prikazan na slici 7.4.



Slika 7.4. Kreiranje Pareto dijagrama u Minitabu

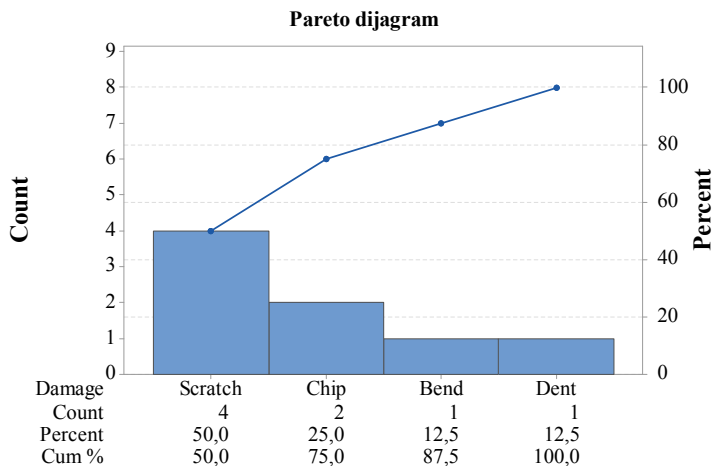
Postoje dve opcije:

1. Ako postoji sirova kolona podataka, unosi se kolona u **Defects or attribute data in**
2. Ako postoji kolona sa imenima defekata i kolona sa brojčanim vrednostima: U **Defects or attribute data in**, unese se kolona sa imenima defekata a u **Frequencies**, unesu se brojčane vrednosti

7.2.1. Primer Pareto dijagrama u Minitabu koristeći sirove podatke

U preduzeću koje se bavi proizvodnjom metalnih polica u postupku finalne kontrole određeni broj polica je odbijen zbog sledećih defekata: ogrebotina, ljuštenja, savijanja i udubljenja. Koristeći Pareto dijagram želi se utvrditi koji defekat izaziva većinu problema. Prvo se prebroje defekti i zatim se unosi ime defekta svaki put kada se pojavi u odgovarajuću kolonu. Postupak u Minitabu je sledeći:

1. U padajućem meniju aktivira se **File>Open Worksheet**.
2. Zatim se aktivira ikonica **Look in Minitab Sample Data folder** i izabere se datoteka **Exh_qc.MTW**
3. Zatim **Stat > Quality Tools > Pareto Chart**
4. Izabrati **Damage** u **Defect or attribute data in**
5. **OK**

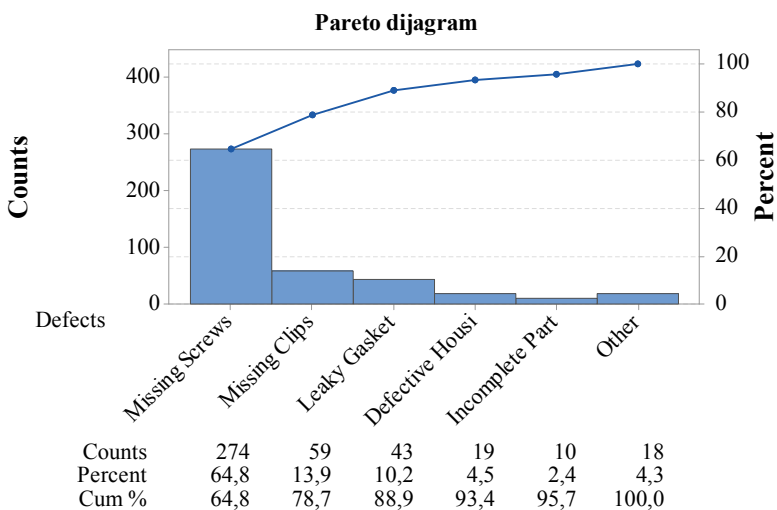


Slika 7.5. Pareto dijagram za sirove podatke

Sa slike 7.5. se može uočiti da 75 % odbijenih metalnih polica je zbog ogrebotina i ljuštenja (*Scratch* i *Chip*), tako da treba uložiti napore za poboljšanje u cilju smanjenja ovih defekata.

7.2.2. Primer Pareto dijagrama u Minitabu koristeći brojčane vrednosti

U preduzeću koje se bavi proizvodnjom motocikala cilj je smanjiti troškove kvaliteta koji proizilaze iz neispravnih brzina. Tokom kontrole, određeni broj brzina je odbijen, i tipovi defekata su snimljeni. Za kreiranje Pareto dijagrama koristi se isti fajl. U polje *Defect or attribute data in* unosi *Defects* a u *Frequencies in* unosi se *Counts*, zatim *OK*.

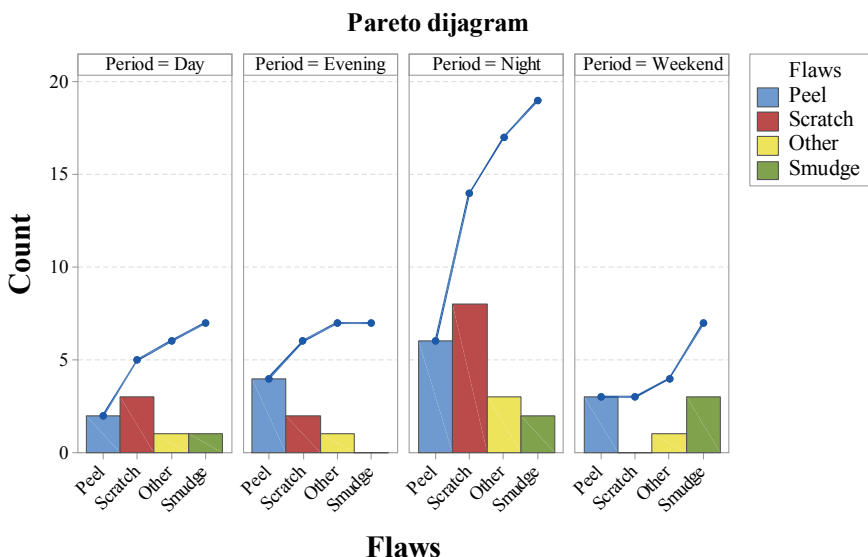


Slika 7.6. Pareto dijagram za brojčane vrednosti

Sa slike 7.6. se može uočiti da je više od polovine brzinomera odbijeno zbog nestalih vijaka (*Missing Screws*), tako da se treba fokusirati na eliminisanje ovog defekta.

7.2.3. Primer Pareto dijagrama u Minitabu koji uključuje razvrstavanje u grupe

U preduzeću koje se bavi proizvodnjom igračaka primećeno je da se sve veći broj igračaka odbije zbog ogrebotina, ljuštenja i/ili mrlja na bojama. Kreiranjem Pareto dijagrama želi se utvrditi da li postoji veza između tipa i broja defekata i radne smene proizvodnje igračaka. Za kreiranje Pareto dijagrama koristi se isti fajl. U polje *Defect or attribute data in* unosi *Flaws* a u *by variable in* unosi se *Period*, zatim *OK*.



Slika 7.7. Pareto dijagram koji uključuje razvrstavanje u grupe

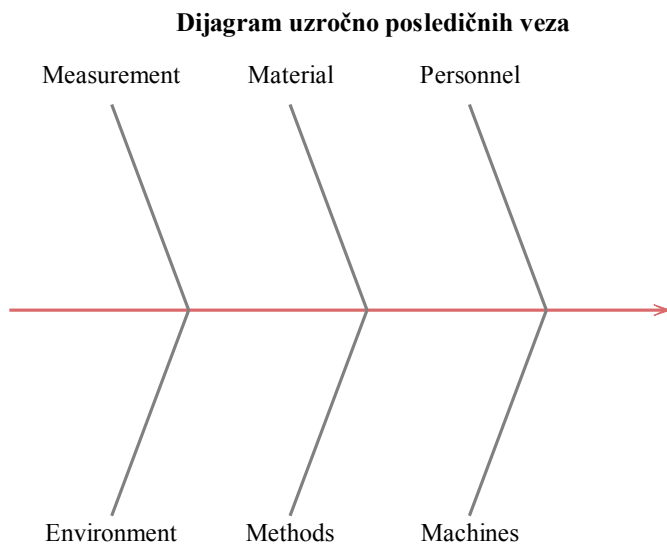
Sa slike 7.7 se može uočiti da noćna smena proizvodi ukupno više defekata. Takođe, može se zaključiti da većina defekata je nastala zbog ogrebotina i ljuštenja (*Scratch* i *Peel*).

7.3. Dijagrami uzročno posledičnih veza – Išikava dijagrami

Dijagram uzročno posledičnih veza je alat kvaliteta koji se koristi za organizovanje informacija o različitim uzrocima koji imaju efekta na određenu pojavu koja se razmatra. Takođe, pomaže u vizuelizaciji problema kada se radi u timovima, kako bi se prioritet stavio na određene oblasti i razvile ideje o unapređenju istih. Prilikom korištenja ovog alata kvaliteta, prvo je potrebno sastaviti radni tim koji je upoznat s problemom, zatim procesom unutar kojeg se problem nalazi. Tim kompetentnih ljudi, koji generiše relativno veliki broj ideja u određenom vremenskom periodu se naziva brainstorming. Tim bi trebao imati moderatora, odnosno vođu koji bi bio zadužen za upoznavanje sa problemom. Sledeći korak je traženje uzroka problema kada se pomoću već

navedenog brainstorming-a daju ideje i mišljenja o mogućim uzrocima. Grupisanje uzroka je sledeći korak, kada se stave svi uzroci na sto potrebno ih je rasporediti u nekoliko kategorija te odvojiti one koji se ne mogu svrstati niti u jednu grupu. Tek tada sledi kreiranje kostura dijagrama na način da se naprave četiri do šest glavnih grupa unutar kojih se dodaju potencijalni uzročnici. Unutar svake od grupa su moguće dodatne podele ako se uoči potreba za njima. Tokom celog procesa, članovi tima su slobodni dodavati i dopunjavati već iznesene tvrdnje, a na vođi tima je da ih na to konstantno podseća. Kada se dijagram popuni, dobija se celokupni prikaz na temelju kojeg članovi tima rangiraju uzroke prema važnosti te se odlučuje o koracima koji će se preduzeti u cilju rešavanja uočenih uzročnika problema. Ova metoda je korisna pogotovo ako se koristi s drugim alatima i metodama, na primer uz Pareto dijagram. Rezultat koji se dobije daje veliku i jasnu sliku o uzroku problema i vodi ka rešavanju problema.

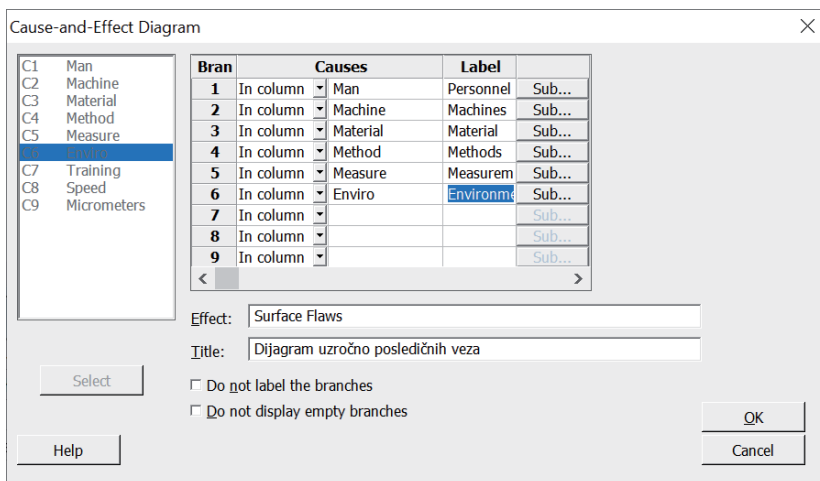
Za kreiranje samo kostura dijagrama uzročno posledičnih veza (bez naznačenih uzročnika i posledice) u Minitabu koristi se sledeće: **Stat > Quality Tools > Cause-and-Effect** i potrebno je odabrati **Do not label the branches**. Ako se ne odabere opcija **Do not label the branches** Minitab će po „difoltu“ imenovati glavnih šest uzročnika, ako drugačije nije navedeno, u koje spadaju merenje, materijal, operater, okolina, metode i mašine. Izgled takvog dijagram je prikazan na slici 7.8. Na slici glavni uzroci su prikazani kosim linijama, a posledica horizontalnom linijom. U nastavku biće prikazani primeri sa dodavanjem novih glavih uzročnika, dodavanjam uzroka koji pripadaju glavnom uzroku, itd.



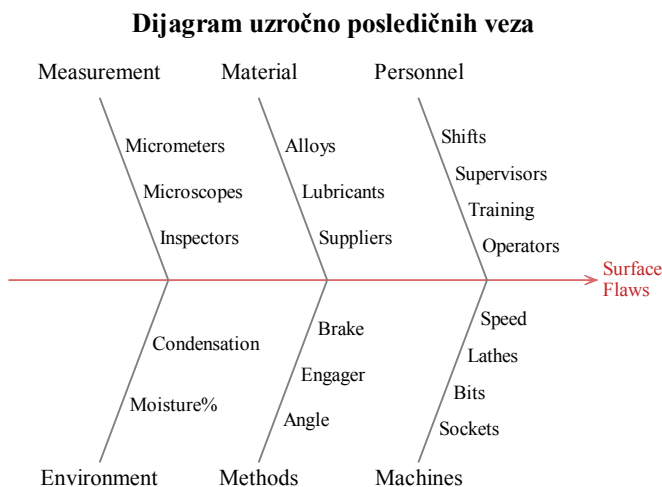
Slika 7.8. *Dijagram uzročno posledičnih veza na naznačenim uzrocima*

7.3.1. Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem uzroka za grane glavnih uzroka

Za potrebe kreiranja svih dijagrama uzročno posledičnih veza, ovde obrađenih, koristiće se fajl *Surfaceflaws.MTW*. Ako drugačije nije navedeno, glavni uzročnici će biti merenje, materijal, operater, okolina, metode i mašine. Nakon što se aktivira prozor za kreiranje dijagrama uzročno posledičnih veza potrebno je pod **Causes** izabrati **Man, Machine, Materijal, Method, Measure** i u **Effect** ukucati **Surface Flaws** (slika 7.9.), zatim **OK**. Minitab će povući podatke (uzroke sadržane u glavnim uzrocima) koji se nalaze u radnom prozoru i dobija se dijagram prikazan na slici 7.10.



Slika 7.9. Kreiranje dijagrama uzročno posledičnih veza u Minitabu sa dodavanjem uzroka glavnim uzrocima



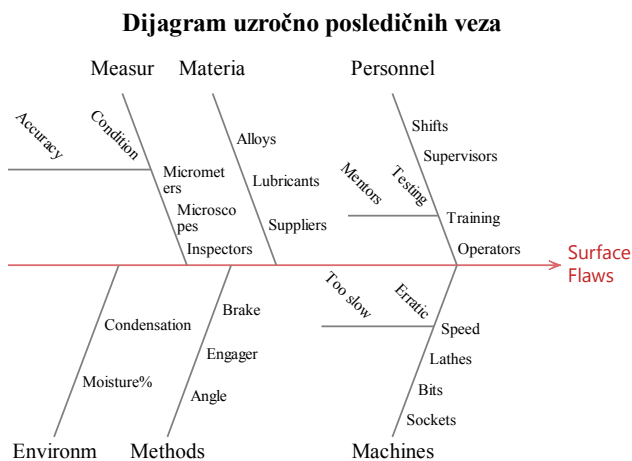
Slika 7.10. Dijagram uzročno posledičnih veza sa naznačenim uzrocima u okviru glavnih uzroka

7.3.2. Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem pod-grana

Koriste se isti podaci i takođe se pod **Causes** izabere **Man**, **Machine**, **Materijal**, **Method**, **Measure** i u **Effect** ukucati **Surface Flaws**. Zatim je potrebno uraditi sledeće:

1. U redu gde je **Man**, kliknuti na **Sub**
2. Pod **Causes**, uneti **Training** u kolonu 3 i **OK**
3. U redu gde je **Machine**, kliknuti na **Sub**
4. Pod **Causes**, uneti **Speed** u red 4 i **OK**
5. U redu gde je **Measure**, kliknuti na **Sub**
6. Pod **Causes**, uneti **Micrometers** u red 1, **OK**.

Na slici 7.11. je prikazan kreiran dijagram.



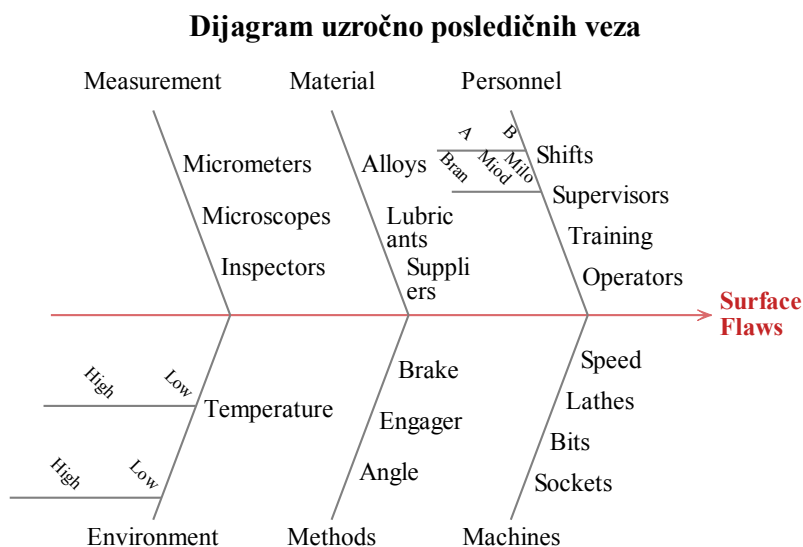
Slika 7.11. Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodatim pod-granama

7.3.3. Dijagram uzročno posledičnih veza sa ručnim dodavanjem pod-grana

Za ovaj primer koristiće se dijagram koji je kreiran u podpoglavlju 7.3.1. Zatim je potrebno uraditi sledeće:

1. Izabrati **Editor > Graph Options**
2. U redu 1, kliknuti na **Sub**
3. U red 1, pod **Causes**, ukucati A B
4. U redu 2, pod **Causes**, uneti Branko Miodrag Miloš i **OK**
5. U redu 6, umesto **Moisture % Condensation** ukucati **Humidity Temperature** zatim kliknuti na **Sub**
6. U redu 1, pod **Causes**, ukucati **High Low**
7. U redu 2, pod **Causes**, ukucati **High Low**
8. **OK**

Na slici 7.12. je prikazan kreiran dijagram



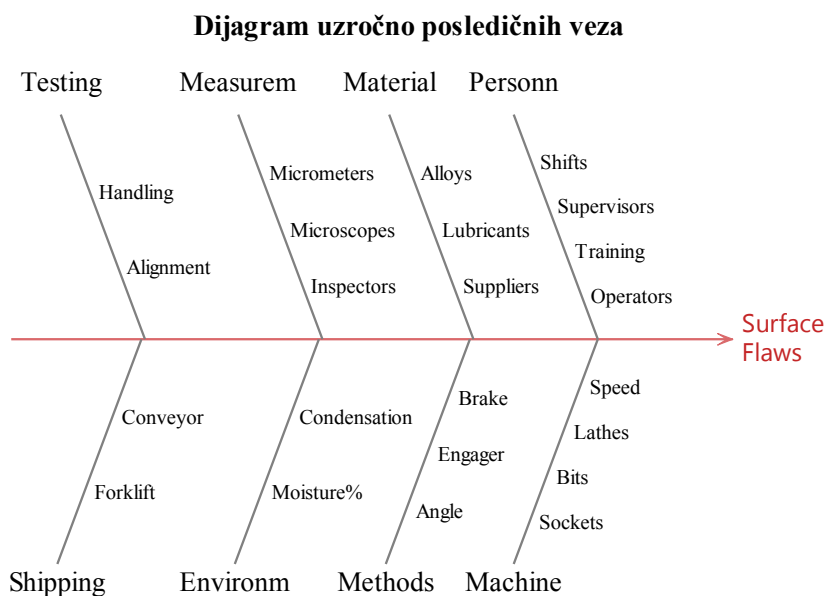
Slika 7.12. Dijagram uzročno posledičnih veza sa ručnim dodavanjem pod-grana

7.3.4. *Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem glavnih uzroka*

Takođe, i za ovaj primer koristiće se dijagram koji je kreiran u podpoglavlju 7.3.1. Zatim je potrebno uraditi sledeće:

1. Izabrati **Editor > Graph Options**
2. U red 7, pod **Causes**, ukucati **Handling Alignment**. Pod **Label**, ukucati **Testing**
3. U red 8, pod **Causes**, ukucati **Forklift Conveyor**. Pod **Label**, ukucati **Shipping**
4. **OK**

Na slici 7.13. je prikazan kreiran dijagram.



Slika 7.13. *Dijagram uzročno posledičnih veza sa dodavanjem glavnih uzroka*

7.4. Dijagram više promenljivih

Dijagram više promenljivih (eng. *Multi-Vari Chart*) predstavlja vizuelan način predstavljanja varijabilnosti kroz serije dijagrama, tj. to je način prikazivanja analize varijanse podataka u grafičkom obliku. Ovaj dijagram podseća na individualnu *Shewhart* kontrolnu kartu sa sledećim razlikama:

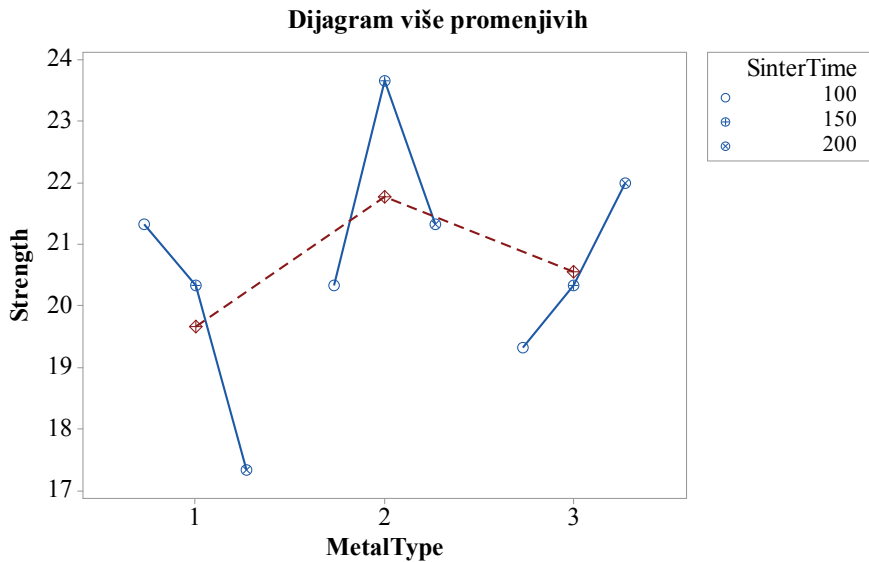
1. Karakteristika kvaliteta koja se razmatra se meri u dva ekstrema i ova merenja su iscrtana kao vertikalne linije koje povezuju minimalne i maksimalne vrednosti tokom vremena
2. Karakteristika kvaliteta je prikazana na tri horizontalna panela koji predstavljaju: varijabilnost na jednom radnom predmetu; varijabilnost od radnog predmeta do radnog predmeta; vremensku varijabilnost
3. Karakteristika kvaliteta je ucrtana u odnosu na gornje i donje specifikacije a ne na kontrolne granice

Minitab crta dijagram više promenljivih za maksimalno četiri faktora varijabiliteta. Ovi dijagrami mogu se takođe koristiti u preliminarnoj fazi analize podataka u cilju pregleda podataka. Dijagram pokazuje srednju vrednost svakog nivoa faktora za svaki faktor. Za kreiranje dijagrama više promenljivih u Minitabu koristi se sledeće:

1. **Stat > Quality Tools > Multi-Vari Chart**
2. U **Response**, uneti kolonu koja sadrži rezultate merenja
3. **Factor** izabrati kolonu koja sadrže faktore (maksimalno četiri faktora), **OK**

7.4.1. Primer dijagrama više promenljivih u Minitabu

Procenjuje se efekat vremena sinterovanja na zateznu čvrstoću tri različita metala. Zatezna čvrstoća je merena pet puta na svakom metalu koji je izložen različitim vremenima sinterovanja: 100 min, 150 min i 200 min. Pre nego što se obavi kompletna analiza podataka, korišćenjem dijagrama više promenljivih može se vizuelno ustanoviti da li postoji neki vidljivi trend ili interakcija u izmerenim podacima. Podaci za kreiranje ovog dijagrama se nalaze u fajlu *Sinter.MTW*. U **Response** je potrebno uneti **Strength**, u **Factor 1 SinterTime** a u **Factor 2 MetalType**. Dijagram više promenljivih je prikazan na slici 7.14.



Slika 7.14. *Dijagram više promenljivih koji uključuje dva faktora*

Sa slike se može zaključiti da postoji interakcija između tipa metala i vremena sinterovanja. Najveća zatezna čvrstoća za metal 1 je dobijena sa vremenom sinterovanja 100 min, za metal 2 za vreme sinterovanja 150 min, i za metal 3 za vreme sinterovanja 200 min. Za dobijanje brojčanih vrednosti ove interakcije, mogu se sprovesti naknadne analize koristeći ANOVU ili opšti linearni model.

8. ANALIZA MERNOG SISTEMA

Isticanje značaja verodostojnosti rezultata merenja je od krucijalnog značaja i to je prepoznato u mnogim strategijama unapređenja poslovanja. Prema konceptu 6σ (šest sigma – eng. *six sigma*) strategiji unapređenja poslovanja koja se zasniva na detekciji i eliminisanju grešaka (defekata) i uzroka pojava grešaka u poslovanju, polazi se od sledećih načela:

1. Ako se nešto ne može tačno izmeriti, ne znamo mnogo o tome
2. Ako ne znamo mnogo o tome, ne možemo ga kontrolisati
3. Ako ne možemo kontrolisati, prepušteni smo slučajnosti

Prema tome posebnu pažnju treba usmeriti na kvalitet rezultata merenja jer je ono osnova spoznaje, odlučivanja, upravljanja i ima aktivnu ulogu u akcijama poboljšanja kvaliteta. Ako rezultati merenja nisu tačni, kupcima će se isporučiti nekvalitetni proizvodi. Grešku merenja u proizvodnji je nemoguće odrediti jer je stvarna vrednost merene veličine uvek nepoznata. Jedino u slučaju merenja referentnih radnih predmeta (etalona) moguće je odrediti grešku merenja. Mnogi internacionalni standardi nalažu da uz rezultat merenja mora biti procenjena merna nesigurnost i da je jedino u tom slučaju rezultat merenja kompletan. Međutim, procena merne nesigurnosti je veoma složen i komplikovan zadatak posebno za industriju jer iziskuje mnogo znanja i vremena koje, rapidne kompanije ne mogu sebi da priušte. Procena merne nesigurnosti je uglavnom ostala u okvirima kalibracionih laboratorija i bitno je da merni instrumenti koji se koriste u undustriji budu kontrolisani od strane ovlašćenog akreditacionog tela, tj. da budu etalonirani. Kalibracioni sistem je skup operacija koje uspostavljaju, pod specifičnim uslovima, vezu između mernog instrumenta i sledljivog standarda poznate referentne vrednosti i nesigurnosti. Kalibracija takođe uključuje korake za otkrivanje, korelaciju, izveštavanje ili eliminisanje, preko podešavanja, bilo koje neslaganje u tačnosti mernog instrumenta koji se poredi. Kalibracioni sistem održava metrološku sledljivost mernog sistema korišćenjem kalibracionih metoda i standarda. Sledljivost predstavlja lanac kalibracionih radnji koje potiču od kalibracionog standarda odgovarajuće metrološke sposobnosti ili merne nesigurnosti. Svaka kalibraciona radnja uključuje sve potrebne elemente uključujući standarde, merenje i opremu koja treba da se verifikuje, kalibracione metode i procedure, evidencije i kvalifikovano osoblje. Takođe, treba napomenuti da se kalibracioni postupci odvijaju u strogo kontrolisanim metrološkim laboratorijama u kojima se osoblje strikno pridržava propisanih standarda i metoda.

Uslovi merenja u proizvodnim kompanijama kao i mernim laboratorijama u istim, uglavnom su daleko nepovoljniji nego uslovi pri kojima se vrši etaloniranje i stoga se ne može merna nesigurnost, procenjena tokom procesa etaloniranja, poistovetiti sa onom u praksi za isti merni instrument. Takođe, jasno je da postoji mnogo varijabilnosti tokom procesa merenja za razliku od

procesa kalibracije istog mernog instrumenta i često dva uzastopna merenja, koja sprovodi isti operater sa istim mernim instrumentom, mereći isti radni predmet i pod istim uslovima, imaju različite vrednosti. Merni proces predstavlja kombinaciju ljudi, opreme, materijala, metoda, analiza i odluka koje se donose o rezultatima merenja. Svi merni sistemi imaju nivo nesigurnosti pridružen njima zbog varijabilnosti u nabrojanim faktorima. Posebno velik problem predstavlja ako varijabilnosti mernog sistema „zamaskiraju“ varijabilnosti koje potiču iz proizvodnog procesa u tom slučaju svaka odluka donešena na bazi rezultata merenja će biti pogrešna.

Analiza mernih sistema (MSA-eng. *Measurement System Analysis*) predstavlja jedan od najvažnijih alata kvaliteta i koristi se za procenu varijabilnosti mernog sistema koji se koriste u normalnim uslovima rada. MSA igra važnu ulogu u sprovođenju 6 σ metodologije i ISO/TS 16949:2009 standardima za procenu pouzdanosti ulaznih i izlaznih podataka u procesu proizvodnje, procenu varijabilnosti izazvanih operaterima, mašinama, metodama, materijalima, okruženjem i analize podataka za poboljšanje procesa. MSA predstavlja metod indentifikacije nivoa varijabilnosti celokupnog sistema kako bi se utvrdilo da li je merni sistem „pogodan za namenjenu upotrebu“, odnosno, da nivo varijacija u merenjima nije značajan za merenu karakteristiku kvaliteta. Svrha MSA je da indentifikuje ukupnu varijabilnost prisutnu u sistemu kako bi se preduzele neophodne radnje za efektivno kontrolisanje i osiguranje ponovljivih i tačnih merenja. Ove studije trebaju biti sprovedene tako da reprezentuju „stvarni svet“ koliko god je moguće; različiti operateri, radni predmeti koji pokrivaju celu specifikaciju, normalna radna okolina, itd. MSA treba biti sprovedena kao deo uvođenja novog proizvoda kako bi se ocenio merni sistem pre proizvodnje. Postoje situacije kada treba ponoviti MSA i to su: promene u dizajnu merila, popravka merila, okolina, promene u dizajnu proizvoda za koje je predviđeno merilo, itd.

Često se za studiju MSA kaže da je to merna nesigurnost za industriju i da predstavlja ocenu kvaliteta rezultata merenja. Kvalitet rezultata merenja se definiše preko statističkih osobina višestrukih merenja dobijenih iz mernog sistema radeći pod stabilnim uslovima. Na primer, pretpostavka je da merni sistem, koji radi u stabilnim uslovima, se koristi za dobijanje nekoliko merenja određene karakteristike kvaliteta i ako su sva merenja „blizu“ referentne vrednosti posmatrane karakteristike kvaliteta, tada se za kvalitet podataka kaže da je „visok“. Slično tome, ako neka, ili sva, merenja su „daleko od referente vrednosti“, za kvalitet rezultata merenja se kaže da je „nizak“.

Statističke osobine koje se najviše koriste da okarakterišu kvalitet podataka su bias i varijansa (dispersija) mernog sistema. Osobina koja se naziva bias odnosi se na položaj podataka u odnosu na referentnu (master) vrednost (u nekim slučajevima se može poistovetiti sa tačnošću ili greškom merenja), a osobina nazvana varijansa se odnosi na rasipanje podataka. U cilju što boljeg razumevanja studije analize mernih sistema potrebno je upoznati se sa osnovnim terminima koji se koriste.

8.1. Terminologija u studiji MSA

Studija „analiza mernih sistema“ može se primeniti na sva merenja tj., svaki merni instrument/merni sistem. Merenje predstavlja „proces dodeljivanja brojeva (numerička karakteristika) ili svojstva (atributivna karakteristika) materijalnim stvarima u cilju predstavljanja odnosa između njih i određenih svojstava“. Dodeljena numerička ili atributivna vrednost u procesu merenja predstavlja rezultat merenja. Za sprovođenje procesa merenja koristi se merni instrument (merilo) ili merni sistem koji predstavlja skup instrumenata, uređaja, operacija, metoda, pribora, softvera, osoblja, okruženja, itd. Kako je već rečeno, svaki merni instrument koji se koristi u procesu merenja mora biti etaloniran (kalibrisan). Postupak etaloniranja se sprovodi koristeći materijalne standarde (referentne radne predmete, etalone). Standardi su prihvaćena osnova za poređenje, kriterijum prihvatljivosti, sinonim za „stvarnu vrednost“ za koje su navedene granice nesigurnosti dobijene preko višeg nivoa lanca sledljivosti (stvarna vrednost merenja je uvek nepoznata i nepristupačna). Osnovne karakteristike mernog instrumenta koje se moraju znati pre sprovođenja studije MSA su:

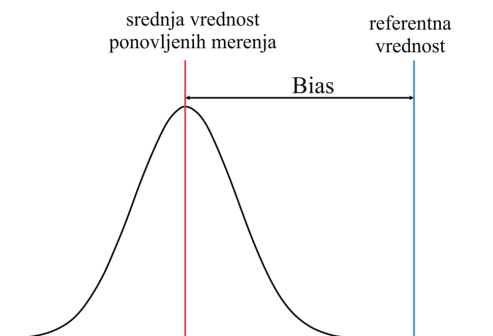
1. Diskriminacija (tačnost očitavanja, rezolucija) merila – najmanja jedinica skale merenja ili izlaza za instrument. Tipično je da se primenjuje pravilo 1/10, tj. određenu karakteristiku kvaliteta treba meriti sa instrumentom čija tačnost očitavanja deli toleranciju na deset delova. Na primer, ako je tolerancija $\pm 0,02$, zahtevana tačnost očitavanja mernog instrumenta treba da je 0,001.
2. Efektivna rezolucija (osetljivost)-najmanji ulaz koji rezultira u izlaznom signalu merenja.

Bias (tačnost) - je razlika između stvarne vrednosti (referentne vrednosti) i srednje vrednosti posmatranog merenja na istoj karakteristici i na istom delu, slika 8.1. Na slici 8.1. rezultati merenja su prikazani preko normalne raspodele gde „vrh zvona“ predstavlja srednju vrednost merenja. Bias je mera sistematske greške mernog sistema. To je doprinos ukupnoj grešci koja se sastoji od kombinovanih efekata svih izvora varijacije, poznatih ili nepoznatih, čiji doprinos ukupnoj grešci teži da dosledno i predvidljivo nadoknadi sve rezultate ponovljenih primena istog procesa merenja u trenutku merenja. Mogući uzroci prekomernog biasa su: instrumentu je potrebna kalibracija, istrošen instrument, oprema ili uređaj, greška u linearnosti, različite metode merenja, itd.

Stabilnost (zanošenje) je ukupna varijacija u merenju dobijena mernim sistemom na istom referentnom delu ili radnom komadu kada se meri jedna karakteristika u dužem vremenskom periodu. Odnosno, stabilnost je promena u bias-u tokom vremena. Mogući uzroci nestabilnosti su: instrumentu je potrebna kalibracija, smanjiti interval kalibracije, istrošen instrument, oprema ili pribor, starenje ili zastarelost, loše održavanje, stabilnost okruženja – temperature, vlažnost, vibracije, čistoća, itd.

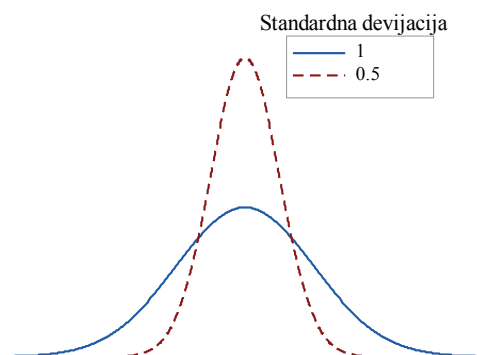
Linearnost - razlika u bias-u u radnom opsegu mernog instrumenta. Linearnost se može posmatrati kao promena bias-a u odnosu na veličinu koja se meri. Mogući uzroci greške linearnosti

uključuju: instrumentu je potrebna kalibracija, smanjiti interval kalibracije, istrošen instrument, oprema ili pribor, nepravilna kalibracija (koja ne pokriva radni opseg) ili upotreba etalona, itd.



Slika 8.1. *Bias*

Ponovljivost (preciznost) - varijabilnost „unutar operatera“. Ponovljivost je varijacija u merenjima dobijenim jednim mernim instrumentom kada je koristi jedan operater nekoliko puta tokom merenja iste karakteristike na istom delu. Ovo je svojstvena varijacija ili sposobnost same opreme. Ponovljivost se obično naziva varijacijom opreme, iako ne mora da bude. U stvari, ponovljivost je uobičajeni uzrok (slučajna greška) odstupanja od uzastopnih ispitivanja pod definisanim uslovima merenja. Najbolji termin za ponovljivost je u okviru varijacije sistema kada su uslovi merenja fiksni i definisani - fiksni deo, instrument, standard, metoda, operator, okruženje i pretpostavke. Pored varijacija unutar opreme, ponovljivost će obuhvatiti sve „unutrašnje“ varijacije iz bilo kog stanja u modelu greške. Unutrašnje varijacije se mogu odnositi na uzorak, instrument, referentni standard, metodu, okruženje, itd. Opisivanje varijacije se definiše rasponom normalne raspodele, a raspon je definisan standardnom devijacijom, slika 8.2.



Slika 8.2. *Predstavljanje ponovljivosti preko standardne devijacije*

Reproduktivnost - varijabilnost „između operatera“. Reprodutivnost se obično definiše kao varijacija u srednjim vrednostima merenja izvršenih od strane različitih operatera (A, B, C) koji

koriste isti merni instrument prilikom merenja istih karakteristika na istom delu. Ovo često važi za ručne instrumente na koje utiče veština rukovaoca. Međutim, to nije tačno za merne procese (tj. automatizovane sisteme) gde operator nije glavni izvor varijacija. Iz tog razloga, reproduktivnost se naziva prosečnom varijacijom između sistema ili između uslova merenja i potencijalno uključuje ne samo različite operatore već i različita merila, laboratorije i okruženje (temperatura, vlažnost), kao i uključivanje ponovljivosti u proračunu reproduktivnosti. Potencijalni izvori grešaka u reproduktivnosti uključuju:

1. Razlike između delova (uzorci): prosečna razlika prilikom merenja vrsta delova A, B, C itd., koristeći isti instrument, operatera i metodu
2. Razlike između instrumenta: prosečna razlika koristeći instrumente A, B, C itd., za iste delove, operatore i okruženje. Napomena: u ovoj studiji greška u reproduktivnosti često se meša sa metodom i/ili operatorom
3. Razlika između standarda: prosečan uticaj različitih standarda za podešavanje u procesu merenja
4. Razlika između metoda: prosečna razlika uzrokovana promenom gustine tačaka, ručni naspram automatizovanih sistema, metode nuliranja, zadržavanja ili stezanja, itd.
5. Razlika između operatera: prosečna razlika između operatera A, B, C, itd., uzrokovana obukom, tehnikom, veštinom i iskustvom. Ovo je preporučena studija za kvalifikaciju proizvoda i procesa i ručne merne instrumente
6. Razlika između okoline: prosečna razlika u merenjima tokom vremena 1, 2, 3, itd. uzrokovana ekološkim ciklusima; ovo je najčešća studija za visoko automatizovane sisteme u kvalifikacijama proizvoda i procesa
7. Kršenje pretpostavke u studiji
8. Dizajn ili metoda instrumenta nemaju robusnost
9. Efikasnost obuke operatera
10. Primena - veličina dela, položaj, greška posmatranja (čitljivost, paralaksa)
11. Merenje pogrešne karakteristike kvaliteta
12. Izobličenja (merni instrument ili deo)
13. Okruženje - temperatura, vlažnost, vibracije, čistoća
14. Kršenje pretpostavke, greška u primenjenoj konstanti
15. Primena - veličina dela, položaj, veština rukovaoca, zamor, greška u posmatranju (čitljivost, paralaksa)

Ponovljivost i reproduktivnost merila *GRR* (eng. *Gage R&R*) je procena kombinovane varijacije ponovljivosti i reproduktivnosti, tj. predstavlja varijansu koja predstavlja zbir varijansi unutar sistema i između sistema, jednačina 8.1:

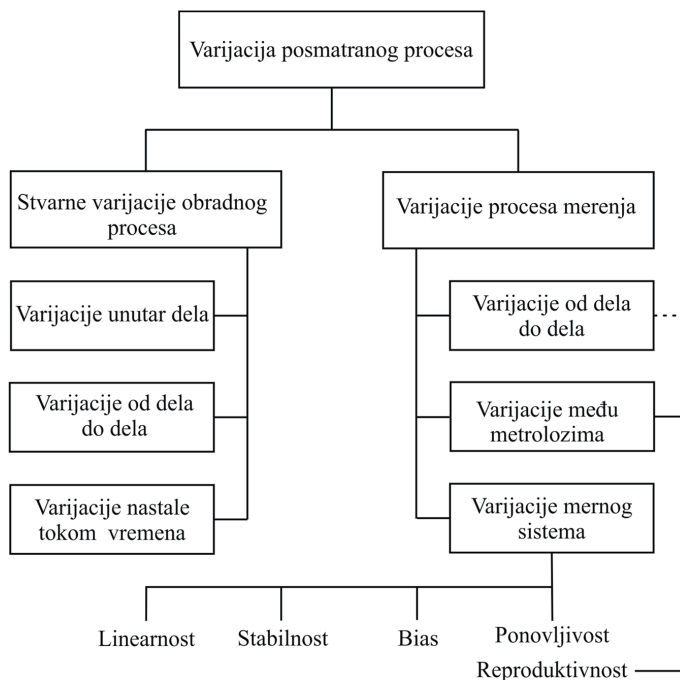
$$\sigma_{GRR}^2 = \sigma_{ponovljivost}^2 + \sigma_{reproduktivnost}^2 \quad (8.1.)$$

Uniformnost predstavlja razliku u varijaciji u radnom opsegu mernog instrumenta. Takođe se može posmatrati kao homogenost ponovljivosti u radnom opsegu.

8.2. *Varijacije mernog sistema*

Idealan sistem merenja bi proizvodio samo „tačne“ mere svaki put kada se koristi. Svako merenje bi se uvek slagalo sa referentnom vrednosti. Ovaj merni sistem ima vrednost varijanse 0, bias 0 i verovatnoću pogrešne klasifikacije bilo kog proizvoda koji meri 0. Na žalost, merni sistemi sa ovim karakteristikama ne postoje i stvarni merni sistemi su pod uticajem slučajnih i sistematskih izvora varijabilnosti. Budući da na sistem merenja mogu uticati različiti izvori varijacija, ponovljena očitavanja na istom delu ne daju isti, identičan rezultat. Očitavanja se međusobno razlikuju zbog uobičajenih i posebnih uzroka. Efekte različitih izvora varijacija na merni sistem treba proceniti tokom kratkog i dugog vremenskog perioda. Stabilnost mernog sistema je greška mernog sistema (slučajna) tokom kratkog vremenskog perioda. To je kombinacija grešaka kvantifikovanih linearnošću, uniformnošću, ponovljivošću i reproduktivnošću. Performanse sistema merenja, kao i performanse procesa, su efekat svih izvora varijacija tokom vremena. To se postiže utvrđivanjem da li je proces u statističkoj kontroli (tj. stabilan i dosledan; varijacija je nastala samo zbog uobičajenih uzroka), ciljano (bez biasa) i ima li prihvatljive varijacije (ponovljivost i reproduktivnost mernog uređaja) u odnosu na opseg očekivanih rezultata. Budući da se izlaz mernog sistema koristi za donošenje odluke o proizvodu i procesu, kumulativni efekat svih izvora varijacije često se naziva greška mernog sistema ili ponekad samo „greška“. Nakon merenja dela, jedna od radnji koja se može preduzeti je utvrđivanje statusa tog dela. Istorijski gledano, utvrdilo bi se da li je deo bio prihvatljiv (u okviru specifikacije) ili neprihvatljiv (izvan specifikacije).

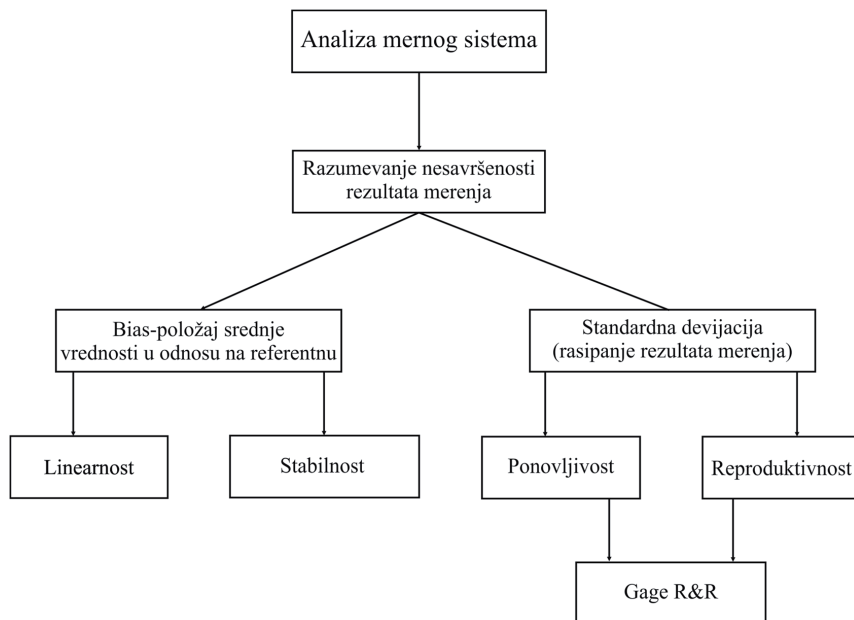
Analiza mernog sistema kvantifikuje greške merenja iz različitih izvora varijacija u procesu. Slika 8.3. ilustruje uočene varijacije procesa uključujući stvarne varijacije procesa proizvodnje i procesa merenja. Varijacija procesa merenja sadrži varijaciju od dela do dela, varijaciju mernog instrumenta i varijacije izazvane različitim operaterima (metrolozima). Varijacije od dela do dela su odstupanja karakteristika proizvoda nastala zbog nesavršenosti postupka obrade. Varijacije mernog instrumenta uključuju linearnost, stabilnost, bias i varijacije merenja usled nesavršenosti mernog instrumenta dobijene prilikom merenja karakteristika mernog instrumenta (ponovljivost). Varijacije nastale zbog metrologa su varijacije nastale kada različiti metrolozi mere, pod istim uslovima i sa istim mernim instrumentom, istu karakteristiku kvaliteta (reproduktivnost).



Slika 8.3. *Varijacija u procesu*

Svi zaposleni u kompaniji moraju da imaju svest da rezultat merenja, dobijen upotrebom bilo kog instrumenta, nije idealan i jedini način da se predoči „udeo“ nesavršenosti mernog instrumenta u rezultatu merenja jeste sprovođenje studije MSA. Studija analize mernog sistema obuhvata procenu biasa (tačnosti) koja obuhvata procenu linearnosti i stabilnosti, i standardne devijacije (varijanse) koja obuhvata studije ponovljivosti i reproduktivnosti (eng. *gage R&R*), slika 8.4. Takođe, može se uvesti pojam sposobnost mernog sistema koja predstavlja procenu kombinovane varijacije grešaka merenja (slučajne i sistematske) na osnovu kratkoročnih procena. Jednostavna sposobnost uključuje komponente: nekompenzovanog biasa ili linearnost i ponovljivost i reproduktivnost (*GRR*). Procena sposobnosti merenja je izraz očekivane greške za definisane uslove i opseg mernog sistema (za razliku od merne nesigurnosti koja predstavlja očekivani opseg greške ili vrednosti povezane sa rezultatom merenja). Izraz sposobnosti kombinovane varijacije kada su greške merenja nekorelisane (slučajne i nezavisne) prikazan je jednačinom 8.2:

$$\sigma_{sposobnost}^2 = \sigma_{bias(linearnost)}^2 + \sigma_{GRR}^2 \quad (8.2.)$$



Slika 8.4. Struktura MSA studije

Za većinu mernih procesa, ukupna varijacija merenja se obično opisuje preko normalne raspodele. Normalna funkcija gustine raspodele verovatnoće je pretpostavka standardnih metoda analize mernih sistema.

Razumevanje varijacije merenja i doprinosa koju daje ukupnoj varijaciji treba da bude fundamentalni korak u rešavanju osnovnih problema. Prvo je potrebno ispitati merni sistem, a nakon toga proces ili proizvod npr. studije sposobnosti procesa. Pre analize mernog sistema potrebno je sprovesti sledećih sedam koraka: identifikovati probleme, odrediti tim, predstaviti dijagram toka mernog sistema i procesa, kreirati dijagram uzročno posledičnih veza, PDSA (eng. *Plan-Do-Study-Act*) krug (planiraj-uradi-prostudiraj-deluj), moguća rešenja i dokaz korekcije, i uspostaviti promenu.

8.3. Sprovođenje MSA studije

Kao i u bilo kojoj studiji ili analizi, potrebno je adekvatno planiranje i priprema pre sprovođenja studije MSA. Tipična priprema pre sprovođenja studije se sastoji u sledećem:

- 1) Pristup koji će se koristiti treba planirati. Na primer, koristiti inženjersko rasuđivanje, vizuelna zapažanja, da li postoji uticaj operatera u kalibraciji ili korišćenju instrumenta.
- 2) Broj operatera, broj komada u uzorku i broj ponovljenih merenja se mora unapred odrediti. Neke faktore koje treba uzeti u obzir pri ovom izboru su:
 - a) Kritičnost dimenzije-kritične dimenzije zahtevaju više delova i/ili ponavljanja

- b) Konfiguracija delova-gabaritni i teški delovi mogu zahtevati manje uzoraka i više ponavljanja
 - c) Zahtevi kupca
- 3) Pošto je svrha proceniti ukupni sistem merenja, biraju se operateri koji najčešće upravljaju instrumentom
 - 4) Izbor uzorka je kritičan za pravilnu analizu i u potpunosti zavisi od dizajna MSA studije, svrhe mernog sistema, i dostupnosti uzorka koji reprezentuju proizvodni proces. Potrebno je izabrati uzorak tako da verodostojno reprezentuje proces
 - 5) Merni instrument mora da ima rezoluciju koja dozvoljava 1/10 očekivane varijacije procesa karakteristike kvaliteta koja se meri
 - 6) Osigurati da je metoda merenja odgovarajuća za posmatranu karakteristiku kvaliteta i da je ispoštovana definisana procedura merenja

Način na koji se studija sprovodi je veoma važna. Sve analize u sprovođenju MSA studije pretpostavljaju statističku nezavisnost pojedinačnih očitavanja. Da bi se smanjila verovatnoća neadekvatnih rezultata potrebno je slediti sledeće korake:

- 1) Merenje treba vršiti randomizirano kako bi se obezbedilo da će se bilo kakvo odstupanje ili promena biti nasumično prisutno u studiji. Operateri ne bi trebalo da znaju koji numerisani deo se meri kako bi se izbegla svaka moguća pristrasnost u znanju. Međutim, delovi treba da budu numerisani kako bi se nakon merenja rezultati zabeležili kao npr. operater A, deo 3, 3. ponavljanje, itd.
- 2) Prilikom očitavanja rezultata merenja merne vrednosti treba da budu zabeležene do praktične granice rezolucije instrumenta
- 3) Studijom treba da rukovodi i nadzire osoba koja razume važnost sprovođenja pouzdane studije

Cilj studije MSA je utvrditi da li je korišćeni merni sistem prihvatljiv za svoju predviđenu namenu. Za ovu svrhu postavljaju se kriterijumi prihvatljivosti mernog sistema. Kriterijum da li je varijabilnost mernog sistema zadovoljavajuća zavisiće od procenta varijabilnosti proizvodnog procesa ili tolerancije radnog predmeta koja se „troši“ na varijaciju mernog sistema. Konačni kriterijumi prihvatljivosti za specifične merne sisteme zavise od okruženja i namene mernog sistema i treba da budu usaglašeni sa zahtevima kupca. Za merne sisteme čija je svrha analiza procesa, opšte uputstvo za prihvatljivost mernog sistema dato je u tabeli 8.1. (bias i greška linearnosti mernog sistema su neprihvatljivi ako se značajno razlikuju od 0 ili se premašuje maksimalno dozvoljena greška utvrđena postupkom kalibracije).

Tabela 8.1. Kriterijumi prihvatljivosti mernog sistema

GRR	Odluka	Komentari
<10 %	Generalno se smatra prihvatljivim mernim sistemom	Preporučeno, posebno korisno kada se žele sortirati ili klasifikovati delovi ili kada je potrebna pooštrena kontrola procesa
10 % - 30 %	Može biti prihvatljivo za neke primene	Trebalo bi da bude odobreno od strane kupca
> 30 %	Smatra se neprihvatljivim	Treba učiniti sve da se poboljša merni sistem

Drugi statistički pokazatelj varijabilnosti mernog sistema je broj različitih kategorija (*ndc*). Ovaj statistički pokazatelj ukazuje na broj kategorija na koje se proces merenja može podeliti. Ova vrednost treba da bude veća ili jednaka 5.

8.4. Analiza mernih sistema za numeričke karakteristike kvaliteta

U nastavku će biti opisane procedure sa primerima za ocenu stabilnosti, linearnosti, biasa i ponovljivosti i reproduktivnosti mernih sistema čiji je rezultat merenja numerička vrednost.

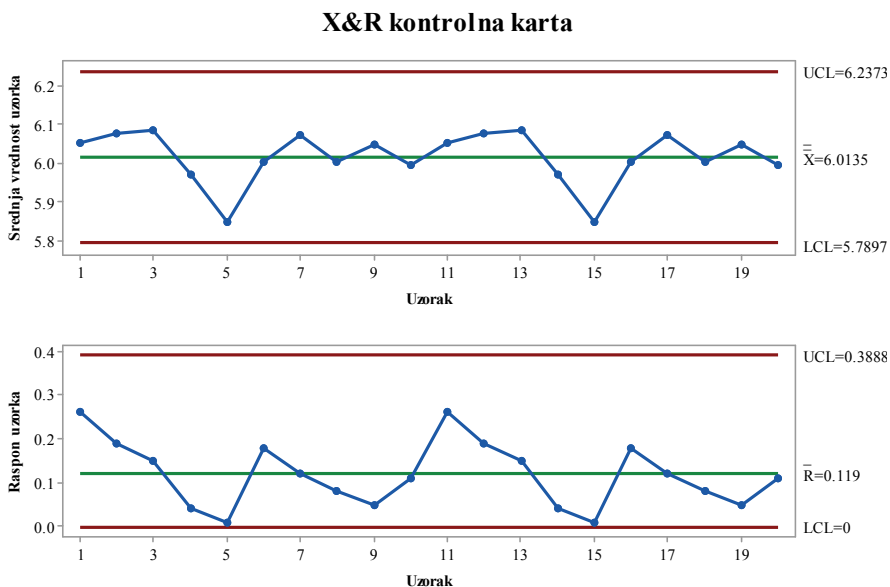
8.4.1. Studija stabilnosti mernog sistema

Za sprovođenje studije stabilnosti mernog sistema potrebo je izvršiti sledeće:

- 1) Izabrati uzorak i odrediti njegove referentne vrednosti u odnosu na sledljivi standard. Ako nije dostupan standard izabere se deo iz proizvodnje koji spada u srednji raspon merenja i označiti ga kao master uzorak za analizu stabilnosti. Poznata referenta vrednost nije potrebna za praćenje stabilnosti mernog sistema.
- 2) Periodično (dnevno, nedeljno) meriti master uzorak tri do pet puta. Veličina uzorka i frekvencija treba da se odrede na osnovu poznavanja mernog sistema. Faktori od kojih ovo zavisi mogu biti koliko često je potrebna ponovna kalibracija, koliko često se koristi merni sistem, i koliko su stresni uslovi rada. Učitavanja treba uzeti u različito vreme da bi se predstavilo kada se merni sistem zapravo koristi. Ovo će uzeti u obzir zagrevanje, ambijent ili druge faktore koji se mogu promeniti tokom dana.
- 3) Prikazati podatke na $\bar{x}$ & R ili $\bar{x}$ & σ kontrolnoj karti.

Rezultati se analiziraju grafički tako da se odrede kontrolne granice i utvrdi se da li su tačke u stabilnim uslovima i da li su u stanju kontrole.

Primer 8.1. Da bi se utvrdilo da li je stabilnost novog mernog sistema prihvatljiva, procesni tim je odabrao deo blizu sredine opsega proizvodnog procesa. Ovaj deo je poslat u mernu laboratoriju u cilju određivanja referentne vrednosti (master vrednosti) koja je 6,01 mm. Tim je merio deo pet puta u jednoj smeni tokom četiri nedelje. Nakon što su svi podaci bili prikupljeni konstruisana je $\bar{x}$ & R kontrolna karta, slika 8.5. Iz kontrolne karte može se zaključiti da je proces merenja stabilan jer se sve tačke nalaze u okviru kontrolnih granica.



Slika 8.5. $\bar{x}$ & R kontrolna karta za ocenu stabilnosti mernog sistema

8.4.2. Studija biasa

Studija biasa se može izvesti primenom dve metode:

1. Metoda nezavisnog uzorka
2. Metoda kontrolne karte

U nastavku će biti opisan **metod nezavisnog uzorka** koji koristi testiranje hipoteza da se utvrdi da li je bias prihvatljiv:

$$H_0: \text{bias} = 0$$

$$H_1: \text{bias} \neq 0$$

Procenjuje se srednja vrednost biasa da bi se utvrdilo da li postojanje biasa može biti posledica slučajnih varijacija. Generalno, bias ili greška linearnosti mernog sistema je prihvatljiva ako se statistički značajno ne razlikuje od nule u poređenju sa ponovljivošću. Shodno tome, ponovljivost

mora biti prihvatljiva u poređenju sa varijacijom procesa da bi analiza bila korisna. Postupak sprovođenja studije je sledeći:

1. Prvo je potrebno izabrati uzorak i utvrditi referentnu vrednost u odnosu na sledljiv standard. U slučaju da nije dostupan, uzima se deo iz proizvodnje koji spada u sredinu opsega izmerenih proizvedenih delova i označiti ga kao master uzorak za analizu biasa. Deo se meri deset puta i izračunava se srednja vrednost ponovljenih merenja. Srednja vrednost se koristi kao referentna vrednost
2. Operator zatim meri deo 10 puta i više, na uobičajan način
3. Odrediti bias svakog očitavanja prema jednačini 8.3:

$$Bias = x_i - referentna\ vrednost \quad (8.3.)$$

4. Prikazati podatke o biasu preko histograma u odnosu na referentnu liniju. Histogram je pogodan da se uoči postojanje nekih posebnih uzroka ili anomalije. Ako ne postoje posebni uzročnici može se nastaviti sa studijom
5. Izračunati srednju vrednost biasa na bazi n očitavanja, jednačina 8.4:

$$srednja\ vrednost\ biasa = \sum_{i=1}^n bias_i / n \quad (8.4.)$$

6. Izračunati standardnu devijaciju ponovljivosti, jednačina 8.5:

$$\sigma_{ponovljivost} = \sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)} \quad (8.5.)$$

7. Odrediti da li je ponovljivost prihvatljiva preko jednačine 8.6:

$$\%EV = 100 [EV/TV] = 100 [\sigma_{ponovljivost}/TV] \quad (8.6.)$$

TV predstavlja ukupnu varijaciju zasnovano na očekivanoj varijaciji procesa (poželjno) ili opseg tolerancije (specifikacije) podeljen sa 6.

8. Odrediti t statistiku za bias, jednačina 8.7:

$$t\ statistika = t_{bias} = \frac{srednja\ vrednost\ biasa}{\sigma_b} \quad (8.7.)$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}$$

σ_b predstavlja nesigurnost biasa

9. Bias je prihvatlji (statistički nula) na α nivou ako:

- p vrednost pridružena t_{bias} je manja od α , ili

- nula upada u granice poverenja $1-\alpha$ na osnovu vrednosti biasa, jednačina 8.8:

$$\text{Bias} - \left[\sigma_b \left(t_{v, 1-\alpha/2} \right) \right] \leq \text{nula} \leq \text{Bias} + \left[\sigma_b \left(t_{v, 1-\alpha/2} \right) \right] \quad (8.8.)$$

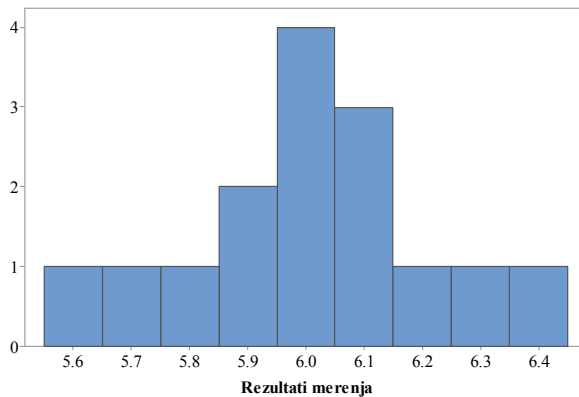
gde je $v = n-1$ i $t_{v, 1-\alpha/2}$ se izvlači iz standardne t tabele (Prilog II). Za vrednost α se uzima 0,05 ako drugačije nije dogovoreno.

Primer 8.2. Inženjer u proizvodnji je ocenjivao novi merni sistem za praćenje procesa. Analizom merne opreme pokazalo se da ne bi trebao biti zabrinutosti za linearnost tako da je imao samo da izvrši studiju biasa mernog sistema. Odabran je jedan deo u okviru radnog opsega mernog sistema na osnovu dokumentovane varijacije procesa. Delu je prvo određena referentna vrednost zatim je meren 15 puta. Rezultati su dati u tabeli 8.2.

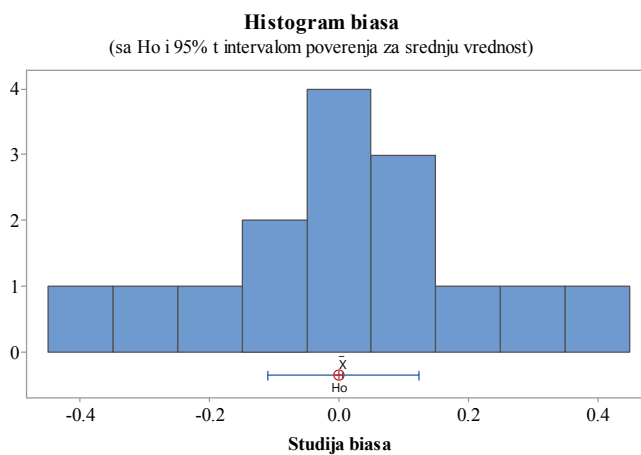
Tabela 8.2. Podaci za sprovođenje studije biasa

Redni broj merenja	Referentna vrednost = 6 mm	Bias
1	5,8	-0,2
2	5,7	-0,3
3	5,9	-0,1
4	5,9	-0,1
5	6,0	0,0
6	6,1	0,1
7	6,0	0,0
8	6,1	0,1
9	6,4	0,4
10	6,3	0,3
11	6,0	0,0
12	6,1	0,1
13	6,2	0,2
14	5,6	-0,4
15	6,0	0,0

Na slici 8.6. prikazan je histogram izmerenih rezultata iz kog se može zaključiti da ne postoje posebni efekti. Za dalje sprovođenje studije biasa koristi se t test jednog uzorka (podpoglavlje 4.1.1) za rezultate biasa iz tabele 8.2. Grafički prikaz analize biasa dat je na slici 8.7. i tabeli 8.3.



Slika 8.6. Histogram izmerenih rezultata



Slika 8.7. Grafički prikaz analize studije biasa

Tabela 8.3. Studija biasa za primer 8.2.

		Referentna vrednost=6,00; $\alpha=0,05$							
	n	Srednja vrednost	Standardna devijacija σ_r	Standardna greška srednje vrednosti σ_b	t statistika	Stepeni slobode df	Značajna vrednost t (dvostrano)	Srednji bias	95 % interval poverenja biasa Donji Gornji
Vrednost merenja	15	6,0067	0,2120	0,0547	0,12	14	2,1447	0,0067	-0,111 0,124

Ponovljivost od 0,2120 je upoređena sa očekivanom varijacijom procesa (standardna devijacija) od 2,5. Pošto je $\% EV = 100 \times (0,2120/2,5) = 8,5 \%$ ponovljivost je prihvatljiva i analiza biasa može da se nastavi. Pošto se nula nalazi u intervalu poverenja biasa $(-0,1107 - 0,1241)$ može se zaključiti da je bias prihvatljiv pod pretpostavkom da stvarna upotreba merila neće uvesti dodatne izvore varijacije. U slučaju da je bias različit od nule, merni instrument treba ponovo kalibrisati.

8.4.3. Studija linearnosti

Procena linearnosti mernog sistema sadrži sledeće korake:

1. Izabrati $g \geq 5$ radnih delova čije veličine pokrivaju radni opseg mernog sistema
2. Potrebno je svakom delu odrediti referentnu vrednost i potvrditi da je obuhvaćen radni opseg mernog sistema
3. Svaki deo se meri $n \geq 10$ puta od strane jednog od operatora koji obično koristi merni sistem
4. Izračunati bias dela za svako merenje i srednju vrednost biasa za svaki deo (jednačine 8.3. i 8.4.)
5. Nacrtati pojedinačne biase i srednje vrednosti biasa u odnosu na referentne vrednosti na linearnom dijagramu
6. Izračunati i grafički prikazati *best fit* liniju (regresiona prava) i interval poverenja linije koristeći sledeće: za *best fit* liniju koristi se jednačina 8.9:

$$\bar{y}_i = ax_i + b \quad (8.9.)$$

gde je x_i referentna vrednost a $\bar{y}_i$ srednja vrednost biasa a parametri prave, a i b su određeni jednačinama 8.10. i 8.11:

$$a = \frac{\sum xy - \left(\frac{1}{gm} \sum x \sum y \right)}{\sum x^2 - \frac{1}{gm} (\sum x)^2} = nagib \quad (8.10.)$$

$$b = \bar{\bar{y}} - a\bar{\bar{x}} = presek \quad (8.11.)$$

Za dato x_o , a granice intervala poverenja su date preko sledećih jednačina:

$$\text{gornja: } b + ax_o + \left[t_{gm-2, 1-\alpha/2} \left(\frac{1}{gm} + \frac{(x_o - \bar{\bar{x}})^2}{\sum (x_i - \bar{\bar{x}})^2} \right)^{1/2} s \right] \quad (8.12.)$$

$$\text{donja: } b + ax_o - \left[t_{gm-2, 1-\alpha/2} \left(\frac{1}{gm} + \frac{(x_o - \bar{\bar{x}})^2}{\sum (x_i - \bar{\bar{x}})^2} \right)^{1/2} s \right] \quad (8.13.)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - b \sum y_i - a \sum x_i y_i}{gm-2}} \quad (8.14.)$$

7. Standardna devijacija varijabilnosti ponovljivosti ($\sigma_{ponovljivosti}=s$). Potrebno je odrediti da li je ponovljivost prihvatljiva preko izraza $\% EV = 100 \times [EV/TV] = 100 \times [\sigma_{ponovljivosti}/TV]$. Ako je $\% EV$ velik, onda varijacije mernog sistema mogu biti neprihvatljive. Pošto studija biasa pretpostavlja da je ponovljivost prihvatljiva, nastavljajući analizu mernog sistema sa velikom vrednosti $\% EV$ će dovesti do obmanjujućih i zbunjujućih rezultata. Ukupna varijacija (TV) je bazirana na očekivanoj varijaciji procesa (poželjnoj) ili opseg specifikacije podeljen sa 6.
8. Nacrtati liniju „bias = 0“ i videti da li na dijagramu postoje posebni uzroci i prihvatljivost linearnosti. Da bi linearnost mernog sistema bila prihvatljiva, linija „bias = 0“ mora ležati u potpunosti unutar opsega intervala poverenja fitovane linije.
9. Zatim je potrebno numerički analizirati rezultate. Ako grafička analiza ukazuje da je linearnost mernog sistema prihvatljiva, tada mora biti zadovoljena hipoteza:

$$H_0: \quad a=0 \quad nagib=0$$

Hipoteza se potvrđuje ako je zadovoljeno:

$$|t| = \frac{|a|}{\left[\frac{s}{\sqrt{\sum (x_j - \bar{x})^2}} \right]} \leq t_{gm-2, 1-\alpha/2} \quad (8.15.)$$

Ako je hipoteza tačna to ukazuje da merni sistem ima isti bias za sve referentne vrednosti. Da bi linearnost bila prihvatljiva ovaj bias mora biti nula.

$$H_0: \quad b=0 \quad presek(bias)=0$$

Hipoteza se potvrđuje ako je zadovoljeno:

$$|t| = \frac{|b|}{\left[\frac{1}{gm} + \frac{s}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \right]} \leq t_{gm-2, 1-\alpha/2} \quad (8.16.)$$

Primer 8.3. Supervizor odeljenja uvodi novi merni sistem za tekući proces. Kao deo procesa odobravanja proizvedenih delova PPAP (eng. *Production Parts Approval Process*) potrebno je proceniti linearnost mernog sistema. Izabrano je pet delova koji obuhvataju opseg mernog sistema na osnovu dokumentovane varijacije procesa. Svakom delu je određena referentna vrednost i meren je dvanaest puta. Izbor delova je bio nasumičan tokom studije. Rezultati su prikazani u tabeli 8.4. U tabeli 8.5. dat je proračun biasa i srednja vrednost biasa.

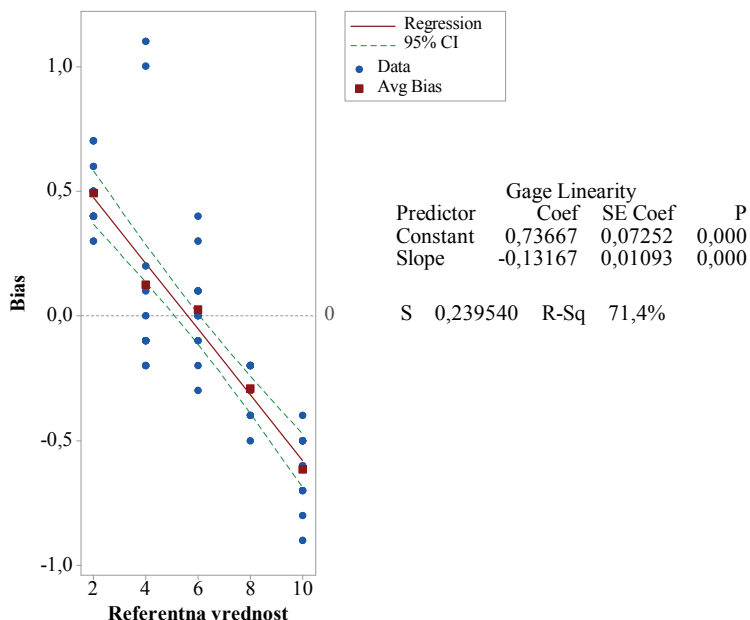
Tabela 8.4. Rezultati za studiju linearnosti

	Deo	1	2	3	4	5
	Referentna vrednost	2	4	6	8	10
Ponovljena merenja	1	2,70	5,10	5,80	7,60	9,10
	2	2,50	3,90	5,70	7,70	9,30
	3	2,40	4,20	5,90	7,80	9,50
	4	2,50	5,00	5,90	7,70	9,30
	5	2,70	3,80	6,00	7,80	9,40
	6	2,30	3,90	6,10	7,80	9,50
	7	2,50	3,90	6,00	7,80	9,50
	8	2,50	3,90	6,10	7,70	9,50
	9	2,40	3,90	6,40	7,80	9,60
	10	2,40	4,00	6,30	7,50	9,20
	11	2,60	4,10	6,00	7,60	9,30
	12	2,40	3,80	6,10	7,70	9,40

Tabela 8.4. Bias i srednja vrednost biasa

	Deo	1	2	3	4	5
	Referentna vrednost	2	4	6	8	10
Ponovljena merenja	1	2,70	5,10	5,80	7,60	9,10
	2	2,50	3,90	5,70	7,70	9,30
	3	2,40	4,20	5,90	7,80	9,50
	4	2,50	5,00	5,90	7,70	9,30
	5	2,70	3,80	6,00	7,80	9,40
	6	2,30	3,90	6,10	7,80	9,50
	7	2,50	3,90	6,00	7,80	9,50
	8	2,50	3,90	6,10	7,70	9,50
	9	2,40	3,90	6,40	7,80	9,60
	10	2,40	4,00	6,30	7,50	9,20
	11	2,60	4,10	6,00	7,60	9,30
	12	2,40	3,80	6,10	7,70	9,40

Dijagram linearnosti je prikazan na slici 8.8.



Slika 8.8. Studija linearnosti – grafička analiza

Grafička analiza ukazuje da postoji verovatnoća da na merni sistem utiču posebni uzroci. Čini se da su podaci za referentnu vrednost 4 bimodalni. Čak i ako se podaci za referentnu vrednost 4 ne uzmu u obzir, grafička analiza jasno pokazuje da merni sistem ima problem sa linearnošću. Vrednost $R-Sq$ ukazuje da linearni model ($y = 0.73667 - 0.13167x$) možda nije odgovarajući model za ove podatke. Čak i ako je linearni model prihvatljiv, linija „bias = 0“ preseca granice poverenja. Za potvrdu ovih tvrdnji potrebno je sprovesti numeričku analizu tj., proračunati t statistiku za nagib i presek: $t_a = -12,043$ i $t_b = 10,158$. Za podrazumevani prag značajnosti $\alpha=0,05$ i koristeći tabelu t raspodele sa $(gm - 2) = 58$ stepeni slobode i proporcijom 0,975 dobija se kritična vrednost od $t_{58, 0,975} = 2,00172$. Pošto je $|t_a| > t_{58, 0,975}$ potvrđuju se zaključci iz numeričke analize da merni sistem ima problem sa linearnošću.

Ako merni sistem ima problem sa linearnošću, potrebno ga je ponovo kalibrisati da se postigne vrednost biasa nula preko hardverske ili softverske modifikacije.

Primer 8.4. Studija biasa i linearnosti u Minitabu

Za sprovođenje studije biasa i linearnosti u Minitabu korišćen je fajl **Gagelin.MTW** (isti podaci se koriste za primer 8.3.) u kom su sadržani rezultati dvanaest ponovljenih merenja na pet referentnih delova. Za izvršenje studije u Minitabu koristi se sledeće: **Stat > Quality Tools > Gage Linearity and Bias Study**. Otvara se prozor koji je potrebno popuniti prema slici 8.9. Polje **Process Variation** je opciono i u njega se unosi vrednost varijacije 6σ (u ovom slučaju je 14,9286).

Slika 8.9. Prozor za sprovođenje studije biasa i linearnosti

Na dijagramu (slika 8.10.) prikazan je odnos referentne vrednosti za sve delove i biasa koji pokazuje za koliko svaka vrednost odstupa od referentne. Plave tačke označavaju odstupanja za svako pojedinačno ponavljanje po delu. Ukoliko su one bliže nuli, bias je manji. Crveni kvadratići predstavljaju srednje vrednosti odstupanja za svaki deo koje su podešene prema regresionoj liniji (crvena linija).

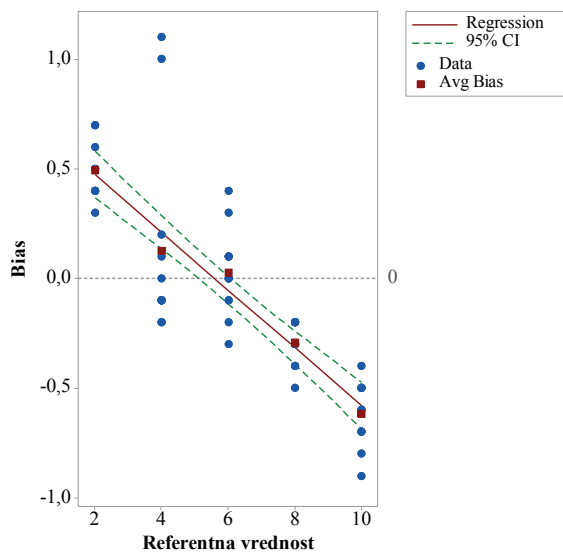
Ukoliko su vrednosti merenja delova sa manjim dimenzijama veće od referentne vrednosti i obrnuto, tada se može reći da postoji problem u linearnosti. U tom slučaju se pojavljuje značajan nagib linije. p -vrednost ukazuje na to da li je nagib statistički značajan ili ne. Što je nagib bliži nultoj vrednosti, manji su problemi u linearnosti. Korišćenjem Minitaba dobijena je numerička i procentualna vrednost linearnosti, tj. 1,96560 i 13,2 % što ukazuje da postoji problem sa linearnošću.

Ispod studije linearnosti na slici 8.10. prikazana je studija biasa. U prvoj koloni predstavljene su referentne vrednosti za sve delove kao i njihova srednja vrednost (*Average*). Bias kolona sadrži srednje vrednosti odstupanja za sve komponente iz prve kolone i računa se kao razlika aktuelne mere i njene referentne vrednosti. Procentualna vrednost biasa se dobija na osnovu sledećeg izraza: $\% \text{ Bias} = |\text{srednja vrednost biasa}| / \text{standardna devijacija}$. U poslednjoj koloni su upisane p -vrednosti koje se koriste za testiranje da li bias značajno doprinosi varijabilnosti ili ne. U idealnom slučaju vrednosti biasa bi bile blizu nulte vrednosti. Pozitivni bias označava da merni instrument precenjuje vrednost koju meri, dok negativni označava da instrument potcenjuje merenu vrednost. Merilo koje vrši tačna merenja ima veoma mali procenat odstupanja odnosno biasa. U datom primeru srednja vrednost biasa za sve delove je negativna -0,053333 dok je procenat biasa 0,4 % što podrazumeva da postoji vrlo mala varijacija usled biasa pri merenju. Mali histogram u donjem desnom uglu slike 8.10. prikazuje koje od ove dve glavne komponente u kojoj meri doprinosi ukupnoj varijaciji procesa merenja. Za dati primer može se zaključiti da postoji problem sa linearnošću, tačnije da merilo ne može da pokaže tačna merenja kroz dati opseg merenja.

Gage Linearity and Bias Report for Response

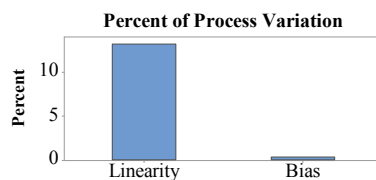
Gage name: Mikrometar 0-25
Date of study: 24.03.2023.

Reported by: Prof.dr Branko Štrbac
Tolerance:
Misc: Fakultet tehničkih nauka



Gage Linearity			
Predictor	Coef	SE Coef	P
Constant	0,73667	0,07252	0,000
Slope	-0,13167	0,01093	0,000
S	0,23954	R-Sq	71,4%
Linearity	1,96560	%Linearity	13,2

Gage Bias			
Reference	Bias	%Bias	P
Average	-0,053333	0,4	0,040
2	0,491667	3,3	0,000
4	0,125000	0,8	0,293
6	0,025000	0,2	0,688
8	-0,291667	2,0	0,000
10	-0,616667	4,1	0,000



Slika 8.10. Prozor rezultata analize studije linearnosti i biasa

8.4.4. Studija ponovljivosti i reproduktivnosti merila - Gage R&R

Studija ponovljivosti i reproduktivnosti merila može da se izvede koristeći različite tehnike:

- Metoda raspona
- Metoda srednjih vrednosti i raspona (uključujući metodu kontrolnih karti)
- ANOVA metoda

Osim za metodu raspona, dizajn podataka u studiji je veoma sličan za svaku od ovih metoda. ANOVA metoda se preferira jer u grešci merila uključuje interakciju dela sa operaterom, dok metoda raspona i metoda srednjih vrednosti i raspona ne uključuje ovu varijabilnost.

Ukupna analiza mernog sistema uključuje ne samo merni instrument i njegov bias, ponovljivost, itd. već uključuje varijaciju delova koji se mere. Određivanje načina kako upravljati varijacijama u okviru delova treba da se zasniva na racionalnom razumevanju namenske upotrebe delova i svrhe merenja. Konačno, sve ove metode podležu preduslovu statističke stabilnosti.

Iako se reproduktivnost obično tumači kao varijabilnost operatera, postoje situacije kada je ova varijabilnost posledica drugih izvora varijacije. Na primer, u nekim mernim sistemima u toku procesa ne postoji uticaj čoveka (koordinatna merna mašina). Ako se sa svim delovima rukuje, steže i meri istom opremom, tada je reproduktivnost nula; tj. potrebna je samo studija ponovljivosti. Ako se, međutim, koristi višestruki pribor, tada postoji reproduktivnost između varijacije pribora.

8.4.4.1. Metoda raspona

Metoda raspona je modifikovana studija varijabilnosti mernog sistema koja na brz način pruža aproksimaciju varijabilnosti merenja. Ova metoda pruža jedino ukupnu sliku sistema merenja. Nema mogućnost razlaganja varijabilnosti na ponovljivost i reproduktivnost. Obično se koristi kao brza provera da verifikuje da se *GRR* nije promenio. Metoda raspona uglavnom koristi dva operatera i pet delova za studiju. U ovoj studiji, oba operatera mere svaki deo jednom. Raspon za svaki deo je apsolutno različit između merenja dobijen od operatera A i merenja dobijenih od operatera B. Prvo se odredi zbir raspona a zatim srednja vrednost raspona ($\bar{R}$). Ukupna varijabilnost merenja se određuje množenjem srednje vrednosti raspona $1/d_2^*$, gde je d_2^* izvučeno iz Dodatka III, sa $m=2$ (broj operatera) i g = broj delova. U tabeli 8.5. dati su podaci za sprovođenje *GRR* studije koristeći metodu raspona.

Tabela 8.5. Podaci za sprovođenje GRR studije preko metode raspona

Deo	Operator A	Operator B	Raspon (A, B)
1	0,85	0,80	0,05
2	0,75	0,70	0,05
3	1	0,95	0,05
4	0,45	0,55	0,10
5	0,50	0,60	0,10

Koristeći podatke iz tabele izračuna se srednja vrednost raspona:

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{5} = \frac{0,35}{5} = 0,07$$

a zatim i ponovljivost i reproduktivnost merila:

$$GRR = \left(\frac{\bar{R}}{d_2^*} \right) = \left(\frac{\bar{R}}{1,19} \right) = \left(\frac{0,07}{1,19} \right) = 0,0588$$

Ako je standardna devijacija procesa je 0,0777 onda je procentualni *GRR*:

$$\% GRR = 100 * \left(\frac{GRR}{\text{standardna devijacija procesa}} \right) = 75,7 \%$$

Ova vrednost predstavlja procenat standardne devijacije procesa koji se potroši na merenje.

Vrednost % *GRR* od 75,7 % ukazuje da je potrebno poboljšati merni sistem.

8.4.4.2. Metoda srednjih vrednosti i raspona

Metod srednjih vrednosti i raspona ($\bar{x}$ & R) je pristup koji obezbeđuje procenu ponovljivosti i reproduktivnosti mernog sistema. Za razliku od metoda raspona, ovaj pristup razlaže ukupnu varijaciju mernog sistema na ponovljivost i reproduktivnost. Međutim, ovaj pristup ne može da proceni interakciju između operatera i dela koji se meri. *GRR* studija podrazumeva korišćenje više delova koji se mere nekoliko puta od strane nekoliko operatera. S obzirom da broj delova, ponovljenih merenja i operatera može varirati, većina studija koristi 10 uzoraka i 3 operatera kod kojih svaki meri delove najmanje tri puta. Generalno, *GRR* studija se sastoji iz sledećih koraka:

1. Izabrati uzorak $g \geq n$ radnih delova koji reprezentuju stvarni ili očekivani raspon varijacije procesa. Izbor reprezentativnog uzorka stoga predstavlja najvažniji korak u sprovođenju uspešne *GRR* studije. Najveća greška koju operateri čine je izbor sličnih proizvodnih uzoraka. *GRR* studija je beskorisna u slučaju da se koriste uzorci koji ne prezentuju varijaciju procesa. Po potrebi, kao rešenje operateri mogu selektovati uzorke u određenom periodu od nekoliko dana ili nedelja kako bi odabrali odgovarajuće među njima koji će stvarno reprezentovati varijaciju procesa. Cilj je da se operateri strogo usmere na procenu varijacije mernih sistema.
2. Imenovati operatere kao A, B, C, itd. i numerisati delove od 1 do n tako da brojevi ne budu vidljivi operaterima.
3. Operater A meri n delova kalibrisanim mernim instrumentom randomizirano i rezultati se unose u red 1.
4. Zatim operateri B i C mere istih n delova a da ne vide rezultate merenja jedno od drugih, zatim uneti rezultate u redove 6 i 11.
5. Ponoviti ciklus koristeći drugačiji redosled merenja. Rezultate merenja upisati u 2, 7 i 12 red. Rezultate upisati u odgovarajuće kolone, tj. u kolonu koja pripada odgovarajućem delu.
6. Koraci 4 i 5 se mogu promeniti kada se mere delovi velikih dimenzija ili istovremena dostupnost delova je otežana prema sledećem:
 - a. Neka operater A meri prvi deo i zabeleži rezultat u red 1. Neka operater B izmeri prvi deo i zabeleži rezultat u red 6. Neka operater C meri prvi deo i zabeleži rezultat u red 11.
 - b. Neka operater A ponovi merenje prvog dela i zabeleži rezultat u red 2, operater B zabeleži ponovljeno merenje u red 7 i operater C zabeleži ponovljeno merenje u red 12. Ovaj ciklus se ponovi i rezultati se unesu u redove 3, 8 i 13.
7. Alternativni metod može da se koristi ako su operateri u različitim smenama. Neka operater A izmeri svih 10 delova i unesu očitavanja u red 1. Zatim neka operater A ponovi merenja

različitim redosledom i rezultate unese u redove 2 i 3. Isti postupak neka urade operateri B i C.

U tabeli 8.6. prikazan je radni list za sprovođenje studije ponovljivosti i reproduktivnosti merila. Sprocedura za popunjavanje radnog lista je sledeća:

1. Oduzeti najmanje očitavanje od najvećeg u redovima 1,2 i 3 (dobijaju se rasponi) i rezultate uneti u red 5. Isto uraditi za redove 6,7 i 8; i 11, 12, i 13 i uneti rezultate u redove 10 i 15. Obzirom da se radi o opsezima sve vrednosti trebaju da budu pozitivne
2. Nakon dobijenih raspona merenja za svakog operatera računa se srednja vrednost raspona za sva tri operatera. Zbir vrednosti u redu 5 se deli sa ukupnim brojem delova i dobija se rezultat $\bar{R}_a$ u zadnjoj koloni reda 5. Ista procedura se koristi za dobijanje srednjih vrednosti raspona $\bar{R}_b$ i $\bar{R}_c$ koje se nalaze u zadnjoj koloni reda 10 i 15
3. Srednje vrednosti raspona za sve operatere se, potom, sabiraju i dele sa brojem operatera. Rezultat predstavlja srednju vrednost svih raspona i upisuje se u red 17, $\bar{\bar{R}}$
4. U redu broj 19 se izračunava proizvod srednje vrednosti svih raspona $\bar{\bar{R}}$ i koeficijenta D_4 koji iznosi 3,27 ukoliko se vrše 2 ponavljanja svakog operatera ili 2,58 ukoliko je broj ponavljanja jednak 3. Rezultat koji se dobija je gornja kontrolna granica (UCL_R) za pojedinačne raspone. Vrednost za donju kontrolnu granicu iznosi 0 za manje od sedam ponavljanja po operateru
5. Ponoviti sva merenja koja su dala raspon veći od proračunatog UCL_R koristeći isti deo i istog operatera kako je bilo prvobitno ili izbaciti ove vrednosti i ponovo proračunati graničnu vrednost UCL_R
6. Sabrati sve vrednosti pojedinačno u redovima 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12 i 13 i podeliti ih sa brojem delova. Dobijeni rezultati se upisuju u zadnju kolonu u istim redovima
7. Dobijene srednje vrednosti u prethodnoj tački se sabere i podele sa brojem ponavljanja za svakog operatera posebno, npr. $\bar{X}_a$ se dobija tako što se sabere vrednosti u zadnjoj koloni redova 1, 2 i 3 i podeli se sa tri

Tabela 8.6. Tabela za sprovođenje GRR studije

Tabela za prikupljanje podataka pri studiji ponovljivosti i reproduktivnosti											
Merila											
Operatori /Ponav.	DEO										Srednja vrednost
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A 1											
2											
3											
Srednja vrednost											$\bar{X}_a =$
Raspon											$\bar{R}_a =$
B 1											
2											
3											
Srednja vrednost											$\bar{X}_b =$
Raspon											$\bar{R}_b =$
C 1											
2											
3											
Srednja vrednost											$\bar{X}_c =$
Raspon											$\bar{R}_c =$
Srednja vrednost dela											$\bar{X} =$ $R_p =$
$([\bar{R}_a = \quad]) + [\bar{R}_b = \quad] + [\bar{R}_c = \quad] / [\text{broj operatera}]$											$\bar{R} =$
$\bar{X}_{\text{razlika}} = [\max \bar{X} \quad] - [\min \bar{X} \quad] = \bar{X}_{\text{razlika}}$											
$*UCL_R = [\bar{X}_{\text{razlika}} \quad] \times D_4$											
* $D_4 = 3.27$ za 2 ponavljanja i 2.58 za 3 ponavljanja. UCL_R predstavlja ograničenje za pojedinačne raspone. Zaokružiti one koje su izvan ovog limita. Identifikovati uzrok i ispraviti. Ponoviti ovo očitavanje koristeći istog operatera i jedinicu kao što su prvobitno korišćene ili odbacite vrednosti i ponovo izračunati $\bar{R}$ i graničnu vrednost iz preostalih zapažanja.											

Izveštaj studije ponovljivosti i reproduktivnosti merila																
Broj dela i ime	Ime merila	Datum:														
Karakteristike	Broj merila	Odradio:														
Specifikacije	Tip merila															
Vrednosti iz podataka: $\bar{R} =$																
$\bar{X}_{razlika} =$																
$R_p =$																
Merna jedinica analize		% Ukupna varijacija (TV)														
Ponovljivost – varijabilnost opreme (EV) $EV = \bar{R} \times K_1 =$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ponavljjanje</th> <th>K_1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>0.8862</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.5908</td> </tr> </tbody> </table>		Ponavljjanje	K_1	2	0.8862	3	0.5908	$\%EV = 100 [EV/TV] =$								
Ponavljjanje	K_1															
2	0.8862															
3	0.5908															
Reprodutivnost – varijabilnost operatera (AV) $AV = \sqrt{(\bar{X}_{razlika} \times K_2)^2 - \frac{(EV)^2}{nr}}$ $n = \text{delovi}; r = \text{ponavljjanja}$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>operater</th> <th>K_2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>0.7071</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.5231</td> </tr> </tbody> </table>		operater	K_2	2	0.7071	3	0.5231	$\%AV = 100 [AV/TV] =$								
operater	K_2															
2	0.7071															
3	0.5231															
Ponovljivost i reprodutivnost (GRR) $GRR = \sqrt{EV^2 + AV^2}$		$\%GRR = 100 [GRR/TV]$														
varijabilnost dela (PV) $PV = R_p \times K_3$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Delovi</th> <th>K_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>0,7071</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0,5231</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>0,4467</td> </tr> </tbody> </table>	Delovi	K_3	4	0,7071	5	0,5231	6	0,4467	$\%PV = 100 [PV/TV]$						
Delovi	K_3															
4	0,7071															
5	0,5231															
6	0,4467															
Ukupna varijabilnost (TV) $TV = \sqrt{GRR^2 + PV^2}$ < 10 %: prihvatljivo 10 % - 30 %: uslovno > 30 %: neprihvatljivo	<table border="1"> <tbody> <tr><td>5</td><td>0,4030</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,3742</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,3534</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,3375</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,3249</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,3146</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	5	0,4030	6	0,3742	7	0,3534	8	0,3375	9	0,3249	10	0,3146			$ndc = 1.41 (PV/GRR)$
5	0,4030															
6	0,3742															
7	0,3534															
8	0,3375															
9	0,3249															
10	0,3146															

8. Od dobijenih vrednosti $\bar{X}_a, \bar{X}_b, \bar{X}_c$ izabere se maksimalna i minimalna vrednosti koje se potom oduzmu i dobije se razlika srednjih vrednosti za sva tri operatera $\bar{X}_{razlika}$ (red 18).
9. Odrediti zbir za sva ponavljanja, za svaki deo i podeliti sa ukupnim brojem merenja (broj ponavljanja puta broj operatera). Dobijenu vrednost uneti u red 16 u deo predviđen za srednje vrednosti.
10. Merne vrednosti za svako ponavljanje i svaki deo posebno se sabiraju i dele sa ukupnim brojem merenja za sve operatere.
11. Izračunati razliku najveće i najmanje srednje vrednosti iz prethodne tačke i dobijena vrednost je raspon srednjih vrednosti delova Rp .
12. Prebaciti vrednosti $\bar{R}, \bar{X}_{razlika}, Rp$ na drugu stranu radnog lista i izvršiti proračune prema upustvima.

Druga strana radnog lista daje smernice za numeričko sprovođenje studije ponovljivosti i reproduktivnosti merila.

Ponovljivost ili varijabilnost opreme (EV ili σ_E) se određuje množenjem srednje vrednosti raspona ($\bar{R}$) i konstante (K_1). K_1 zavisi od broja ponavljanja korišćenih u studiji merila i jednako je inverziji od d_2^* koje se dobija iz priloga III. d_2^* zavisi od broja ponavljanja (m) i broja delova puta broj operatera (g) (pretpostavlja se da je veće od 15 za izračunavanje K_1).

Reproduktivnost ili varijabilnost operatera (AV ili σ_A) se dobija množenjem maksimalne srednje vrednosti razlike među operaterima ($\bar{X}_{razlika}$) i konstante K_2 . K_2 zavisi od broja operatera korišćenih u studiji merila i inverzije od d_2^* koja se dobija iz Priloga III. d_2^* zavisi od broja operatera (m) i $g=1$ pošto postoji samo jedan izračunati raspon. Pošto je varijabilnost operatera kontaminirana varijabilnošću opreme, mora se podesiti oduzimanjem dela varijabilnosti opreme. Iz tog razloga varijabilnost operatera (AV) se računa prema jednačini 8.17:

$$AV = \sqrt{(\bar{X}_{razlika} \times K_2)^2 - \frac{(EV)^2}{nr}} \quad (8.17.)$$

gde je n broj delova a r je broj ponavljanja.

Ako se ispod kvadratnog korena izračuna negativna vrednost, varijabilnost operatera (AV) se podrazumeva da je nula.

Varijabilnost mernog sistema za ponovljivost i reproduktivnost (GRR ili σ_M) izračunava prema jednačini 8.18:

$$GRR = \sqrt{(EV)^2 + (AV)^2} \quad (8.18.)$$

Varijabilnost delova (eng. *part-to-part*) (PV ili σ_P) se određuje množenjem raspona srednjih vrednosti delova (R_p) i konstante K_3 . K_3 zavisi od broja delova korišćenih u studiji merila i inverzije od d_2^* koja se dobija iz Priloga III. d_2^* zavisi od broja delova (m) i $g=1$ pošto postoji samo jedan izračunati raspon.

Na kraju, ukupna varijabilnost (TV i σ_T) dobijena u rezultatima merenja se izračunava prema jednačini 8.19:

$$TV = \sqrt{(GRR)^2 + (PV)^2} \quad (8.19.)$$

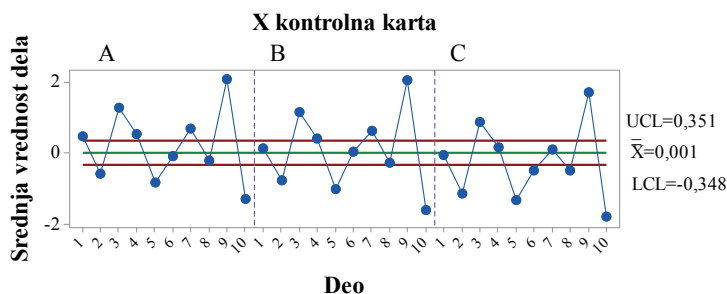
Procentualni udeo varijabilnosti opreme (% EV) u ukupnoj varijabilnosti (TV) se računa $100 \times [EV/TV]$. Na isti način se računaju procentualni udeli varijabilnosti mernog sistema, varijabilnosti operatera i varijabilnosti delova u ukupnoj varijabilnosti. Procentualni zbir svakog udela neće biti jednak 100. Procentualne udele je bitno odrediti jer se koriste za ocenu prihvatljivosti mernog sistema za predviđenu primenu.

Poslednji korak u numeričkoj analizi je određivanje broja različitih kategorija koji se mogu pouzdano razlikovati mernim sistemom. Ovo je broj nepreklapanja 97 % intervala poverenja koji će obuhvatiti očekivanu varijabilnost proizvoda. Dobija se koristeći jednačinu 8.20:

$$ndc = 1,41(PV/GRR) \quad (8.20.)$$

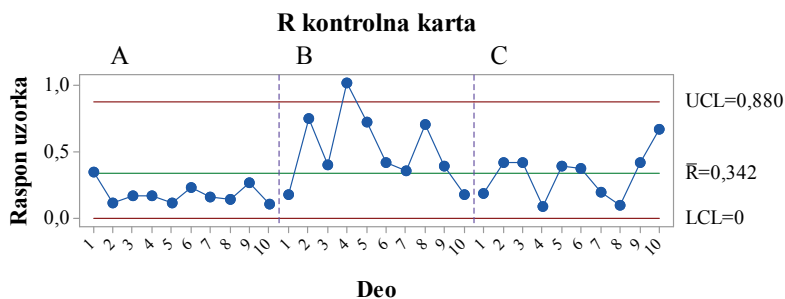
Pored numeričke analize u studiji ponovljivosti i reproduktivnosti mernog sistema korisno je i grafički analizirati podatke. Koriste se sledeći dijagrami za grafičku analizu podataka:

- **X karta u zavisnosti od operatera.** Ovo je zapravo kontrolna karta koja prikazuje ukupnu srednju vrednost merenja za svakog pojedinačnog operatera i omogućava njihovo poređenje međusobno kao i poređenje sa ukupnom srednjom vrednošću merenja za sve operatere (svetlo zelena horizontalna linija na karti), slika 8.11. Ova kontrolna karta pruža mogućnost za određivanje da li se srednja vrednost svakog operatera nalazi u kontrolnim granicama ili ne (kontrolne granice su označene crvenim horizontalnim linijama na karti). S obzirom da delovi u GRR studiji su upotrebljeni da reprezentuju varijabilnost mernog sistema, približno 50 % ili više tačaka na karti treba da budu izvan kontrolnog limita (kao što je u ovom primeru slučaj) što podrazumeva da je merni sistem sposoban da otkrije varijabilnost između delova (*part-to-part*) i pruži korisnu informaciju za analizu i kontrolu mernog procesa. Ukoliko je manje od 50 % tačaka izvan kontrolnog limita tada se može reći da merni sistem ne poseduje odgovarajuću rezoluciju ili da delovi ne pokazuju dovoljno varijabilnosti koliko se očekuje.



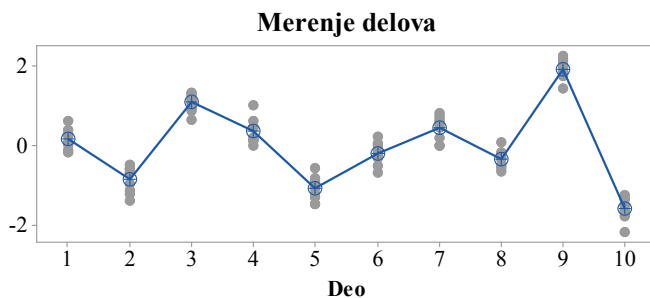
Slika 8.11. Dijagram srednjih vrednosti u zavisnosti od operatera

- **Dijagram raspona (R kontrolna karta)** - prikazuje varijabilnost u merenjima za svakog pojedinačnog operatera i omogućava poređenje među operaterima kako bi se utvrdilo da li se varijacije nalaze u kontrolnim granicama, slika 8.12. Tokom analize neophodno je pažnju obratiti prvo na R kartu jer ukoliko tačke na R karti nisu u opsegu kontrolnih granica tada nema smisla posmatrati X kartu. Posmatranjem tačaka može se izvesti nekoliko zaključaka: svi operateri rade dobar posao ukoliko su tačke na karti unutar kontrolnih granica; ukoliko jedan operater ima rezultate koji su van opsega, može se ustanoviti da on nije radio po instrukcijama ili je koristio drugačije tehnike od ostalih operatera; ako su rezultati za sve operatere van opsega kontrolnih granica tada merni sistem pokazuje osetljivost i neophodna su poboljšanja kako bi se stekli korisni podaci.



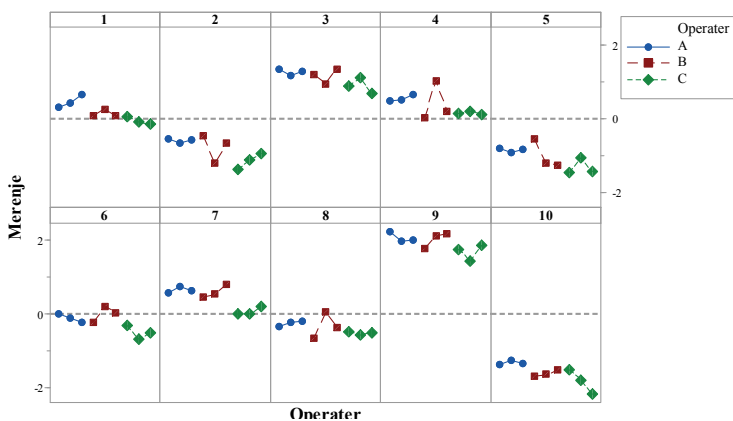
Slika 8.12. R kontrolna karta

- **Dijagram varijabilnosti delova** – Pojedinačna očitavanja su prikazana za deo za sve operatere da bi se stekao uvid da li postoji uticaj pojedinih delova na doslednost varijabilnosti i da ukaže na *outlier-e*. Sa slike 8.13. može se uočiti da *outlier-i* ne postoje.



Slika 8.13. Dijagram varijabilnosti delova

- **Dijagram varijabilnosti operatera** koji prikazuje pojedinačna očitavanja operatera na delovima da bi se stekao uvid u konzistentnost između operatera, ukazivanje na *outlier-e* i interakcije između delova i operatera. Slika 8.14. ne ukazuje na postojanje *outlier-a*, ali ukazuje da operater može imati niža očitavanja od ostalih operatera.

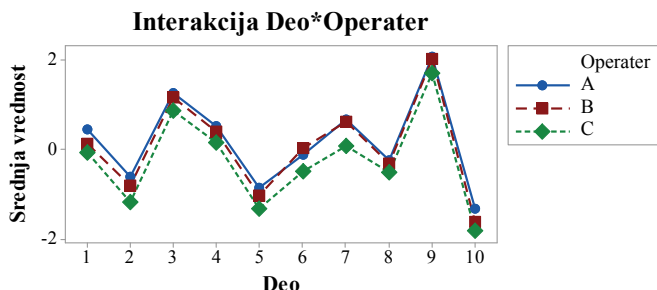


Slika 8.14. Dijagram rasipanja uticaja operatera na merenje delova

8.4.4.3. ANOVA metod

ANOVA (analiza varijanse) je detaljno objašnjena u poglavlju 4. ANOVA u slučaju studije ponovljivosti i reproduktivnosti merila razlaže ukupnu varijansu u četiri kategorije: delovi, operater, interakcija između dela i operatera i merni sistem. Prednosti ANOVA metode u odnosu na predhodne dve metode su u tome što može da se sprovede nad bilo kojim eksperimentalnim postavljanjem, preciznije procenjuje varijanse i daje više informacija iz eksperimentalnih podataka kao što je interakcija između delova i operatera. Kao nedostatak se može navesti složeniji proračun koji zahteva dosta viši nivo statističkog znanja korisnika da bi se adekvatno tumačili rezultati. Zbog komplikovanosti proračuna neophodna je softverska podrška.

Za uspešnost korišćenja ANOVA metode potrebno je podatke skupljati randomizirano. Grafička analiza je identična kao i kod metode srednjih vrednosti i raspona stim što ANOVA metod pruža grafički prikaz interakcije između operatera i delova, slika 8.15. Na slici su predstavljene srednje vrednosti merenja operatera za svaki komad koje su povezane linijom. Ako su linije međusobom paralelne, u tom slučaju ne postoji interakcija, i obrnuto.



Slika 8.15. Dijagram interakcije delova i operatera

Kako je već rečeno, numerička analiza se uglavnom sprovodi softverski pa će o primeni ANOVA metode za *GRR* biti više reči u sledećem podpoglavlju.

8.4.4.4. Gage R&R studija u softverskom paketu Minitab

U Minitab programskom prozoru ponuđeno je nekoliko studija koje omogućavaju određivanje varijacije koja proističe iz mernog sistema. U Minitab-u postoje tri *GRR* studije:

- **Ukrštena RR studija merenja, eng. *Gage RR (Crossed)*** - primenjuje se kada više operatera mere svaki deo nekoliko puta;
- **Ugneždjena RR studija merenja, eng. *Gage RR (Nested)*** – primenjuje se kada svaki deo meri samo jedan operater. Ova studija se primenjuje kod kontrole sa razaranjem (tzv. destruktivnog testiranja, npr. kreš testovi).
- **Proširena RR studija merenja, eng. *Gage RR (Extended)*** – primenjuje se u slučajevima kada su dati „nebalansirani“ podaci. Npr. usled gubitaka nekih rezultata merenja ova studija omogućava da se analizira merni sistem bez manuelnog izračunavanja izgubljenih podataka.

Ukrštena GRR studija merenja u Minitabu

Ukrštena RR studija se bira u slučajevima kada se svaki deo meri više puta od strane više operatera. Za pokretanje studije koristi se **Stat > Quality Tools > Gage R&R Study (Crossed)**, otvara se prozor koji nudi izbor za izvršenje studije (*ANOVA, Xbar and R*), slika 8.16.

Slika 8.16. Prozor za sprovođenje GR&R studije u Minitabu

U nastavku će biti urađena dva primera, prvi **Gageaiag** (u bazi podataka Minitaba) – mala varijacija mernog sistema u kojoj tri operatera mere deset delova, po tri puta, randomizirano) i druga u kojoj varijacija mernog sistema u većoj meri doprinosi ukupnoj varijaciji u kojem tri operatera mere tri dela, po tri puta, randomizirano.

Primer 8.5. Gageaiag fajl sadrži tri kolone Deo (**Part**), Operater (**Operator**) i Rezultati merenja (**Measurment**). Ove podatke je potrebno uneti u odgovarajuća polja u prozoru za sprovođenje GRR studije u Minitabu, slika 8.16. Prvo će se odabrati metoda srednjih vrednosti raspona (**Xbar and R**), zatim **OK**. Rezultati studije se prikazuju numerički u radnom prozoru (slika 8.17.) i grafički (slika 8.18.).

Gage R&R Study - XBar/R Method					
Gage name:		Mikrometar 0-25			
Date of study:		26.03.2023.			
Reported by:		Prof. dr Branko Štrbac			
Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)	StdDev (SD)	Study Var (6×SD)	% Study Var
Total Gage R&R	0,09350	7,12	0,30578	1,83469	26,68
Repeatability	0,04075	3,10	0,20186	1,21118	17,61
Reproducibility	0,05275	4,02	0,22968	1,37810	20,04
Part-to-Part	1,21982	92,88	1,10445	6,62672	96,37
Total Variation	1,31332	100,00	1,31332	6,87601	100,00
Number of Distinct Categories = 5					

Slika 8.17. Numerička studija GRR u Minitabu primernom metode srednjih vrednosti i raspona

Skraćeni izrazi u radnom prozoru predstavljaju numeričke vrednosti varijacije u navedenim izvorima i njihov procentualni doprinos ukupnoj varijaciji merenja. Te skraćenice su sledeće:

- **VarComp** (Komponenta varijabilnosti) – Označava komponentu varijabilnosti koja se stiče iz svakog pojedinačnog izvora. Numeričke vrednosti se dobijaju kvadriranjem standardne devijacije; Varijansa;
- **% Contribution** (Procenat doprinosa) – Označava koliko svaka komponenta varijabilnosti doprinosi ukupnoj varijabilnosti merenja. Dobija se tako što se svaka komponenta varijabilnosti podeli sa ukupnom varijabilnosti i pomnoži sa brojem 100 kako bi se izrazila u procentima. Zbir doprinosa svih varijabilnosti treba da bude jednak 100 % zbog toga što su varijanse aditivne za razliku od standardne devijacije;
- **StdDev** (Standardna devijacija) – Označava standardnu devijaciju za svaku komponentu varijabilnosti koja se može izračunati i manuelno.
- **Study Var** (Varijabilnost studije) – Standardna devijacija pomnožena sa brojem 6. U ranijim verzijama Minitaba devijacija se množila sa 5,15 kako bi se ostvario raspon mernog procesa od 99 %. Kako se vremenom javila potreba za povećanjem raspona na 99,73 %, povećao se i sigma nivo, i umesto $5,15\sigma$ današnja verzija Minitaba koristi 6σ nivo.
- **% Study Var** (Varijacija studije u procentima) – Dobija se kao količnik svake pojedinačne komponente varijabilnosti studije i ukupne varijacije studije. Zbir svih vrednosti ne treba da iznosi 100 %.
- **Number of Distinct Categories** (Broj različitih kategorija delova) – Ova cifra označava koliko različitih kategorija delova merni sistem može da raspozna. Npr. merni sistem je izmerio 10 delova i od njih je uspeo da razlikuje 5 različitih kategorija. To podrazumeva da su neki od 10 izmerenih delova previše identični da bi merni sistem mogao da ih razdvoji u kategorije i da je neophodno mnogo preciznije merilo kako bi se broj kategorija povećao. Kako je već rečeno, ovaj broj se dobija tako što se izračuna količnik standardne devijacije delova (*Part-To-Part*) i standardne devijacije merila (*Total Gage R&R*) i pomnoži sa koeficijentom 1,41. Vrednost se zaokružuje na najbliži ceo broj. Prema preporukama standarda ukoliko je broj različitih kategorija manji od 2, merni sistem se smatra neprihvatljivim jer nije u stanju da razlikuje delove i sve ih svrstava u jednu kategoriju. Za prihvatljivi merni sistem neophodno je 5 ili više različitih kategorija delova.

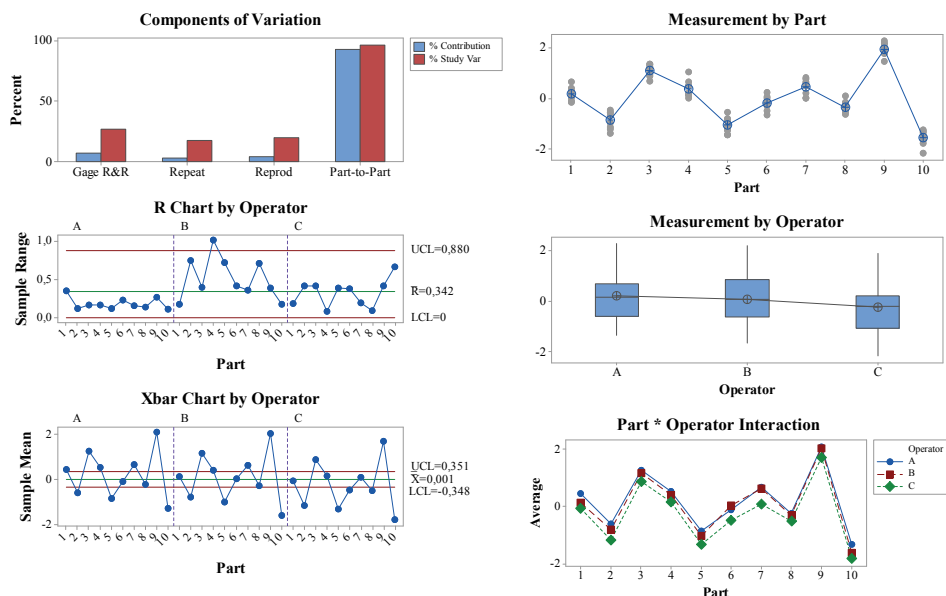
U tabeli 8.1. date su smernice za prihvatanje mernog sistema. Prema tim smernicama merni sistem razmatran u ovom primeru nije prihvatljiv jer **Total Gage R&R** u koloni **% Study Var** veće od 10 %. Takođe u Minitabu postoji kriterijum za prihvatljivost mernog sistema na osnovu **% Contribution (of VarComp)** za **Total Gage R&R** prema sledećem:

- Prihvatljiv % *Contribution (of VarComp)* < 1 %
- Uslovno prihvatljiv % *Contribution (of VarComp)* od 1 % do 9 %
- Neprihvatljiv % *Contribution (of VarComp)* > 9 %

Gage R&R (Xbar/R) Report for Measurement

Gage name: Mikrometar 0-25
Date of study: 26.03.2023.

Reported by: Prof. dr Branko Štrbac
Tolerance:
Misc: Fakultet tehničkih nauka



Slika 8.18. Grafička studija GRR u Minitabu primenom metode srednjih vrednosti i raspona

Nakon analize radnog prozora u Minitabu, pristupa se analizi grafičkog prikaza koji se sastoji iz ukupno 6 dijagrama, većina od ovih dijagram su objašnjeni prethodno, slika 8.18. Pored dosada objašnjenih dijagrama tj. **R chart by Operater** (R kontrolna karta u zavisnosti od operatera), **Xbar Chart by Operater** (X karta u zavisnosti od operatera), **Measurement by Part** (Dijagram varijabilnosti delova), **Measurement by Operater** (Dijagram varijabilnosti operatera) – razlika od prethodnog objašnjenja je u tome što se ovaj dijagram prikazuje preko box-plot dijagrama i **Part * Operater Interaction** (dijagram interakcije) iako se GRR sprovodi metodom srednjih vrednosti i raspona, Minitab prikazuje dijagram interakcija.

Dijagram koji nije gore pomenut je **Components of Variation** (Komponente varijacije) koji predstavlja grafički prikaz (histogram) radnog prozora koji pokazuje doprinos komponenti ukupnoj varijabilnosti merenja. Jasno se vidi da u ovom primeru najveći doprinos ukupnoj varijabilnosti polazi

od varijabilnosti između različitih delova (**Part-to-Part**), tačnije da izmereni delovi nisu identični što se i očekuje u ovoj studiji, dok je ukupna varijacija mernog sistema (**Gage R&R**) mnogo manja. Za ukupnu varijaciju mernog sistema vezana su dva stuba na histogramu. Ukoliko je stub **Repeat** veći u odnosu na stub **Reprod**, to označava problem sa ponovljivošću, odnosno da su jedan ili više operatera nekonzistentni u svojim merenjima. U suprotnom, ako je **Reprod** veći, to bi značilo da postoji problem sa reproduktivnošću merenja, odnosno da neki od operatera nisu konzistentni sa ostalima. U ovom primeru se može zaključiti da od ukupne varijacije mernog sistema postoje za nijansu veći problemi sa ponovljivošću u odnosu na reproduktivnost merenja.

U nastavku sledi studija ponovljivosti i reproduktivnosti merila ako se koristi ANOVA metoda za isti primer. Primena ANOVA metode u softveru Minitab je identična kao i kod prethodne metode. Glavna razlika između **ANOVA** i $\bar{x}$ & **R** metode je, kako je pomenuto, u reproduktivnosti. U skladu sa komponentama varijacije za reproduktivnost merenja u dvofaktorskoj ANOVA tabeli Minitab softver postavlja dva ANOVA modela. Ti modeli su:

1. **Potpuni model (model sa interakcijom)** –U ANOVA tabelu su unete *F* i *p* vrednosti za, **Operator**, interakciju **Part*Operator** i za **Parts**. Ako je *p* vrednost za interakciju između dela i operatera manja od 0,05; Minitab će prikazati novu ANOVA tabelu bez interakcije. Ponovljivost u ANOVA tabeli predstavlja komponentu greške, tabela 6.4. Takođe, na osnovu *p* vrednosti se određuje statistička signifikantnost delova i operatera.
2. **Redukovani model (model bez interakcije)** –razmatraju se samo pojedinačni efekti operatera i delova, ne uzimajući u obzir interakciju između njih.

Potpuni i redukovani model su prikazani na slici 8.19. Na osnovu *p* vrednosti može se zaključiti da interakcija nije statistički značajna. Takođe, vrednosti *p* za deo i operatera dokazuju statističku signifikantnost. Isto kao i za metodu srednjih vrednosti i raspona, na slici 8.20. prikazana je **GRR** studija koristeći ANOVA metodu. Vrednosti su neznatno drugačije u odnosu na metodu srednjih vrednosti i raspona. Može se uočiti da se u ovoj **GRR** studiji pojavljuje kolona **Operator**. Na osnovu vrednosti **% Study Var** i **%Contribution (of VarComp)** u koloni **Total Gage R&R** može se zaključiti da merni sistem nije prihvatljiv ili preciznije da može biti prihvatljiv za neke primene prema pravilima odlučivanja u tabeli 8.1. Razlika ANOVA metode i metode srednje vrednosti i raspona se ogleda u tome što broj različitih kategorija nije isti, tj. za ANOVA metodu je ovaj broj 4.

Two-Way ANOVA Table With Interaction					
Source	DF	SS	MS	F	p
Par	9	88,3619	9,81799	492,291	0,000
Operater	2	3,1673	1,58363	79,406	0,000
Part * Operater	18	0,3590	0,01994	0,434	0,974
Repeatability	60	2,7589	0,04598		
Total	89	94,6471			
α to remove interaction term = 0.05					
Two-Way ANOVA Table Without Interaction					
Source	DF	SS	MS	F	p
Part	9	88,3619	9,81799	245,614	0,000
Operater	2	3,1673	1,58363	39,617	0,000
Repeatability	78	3,1179	0,03997		
Total	89	94,6471			

Slika 8.19. ANOVA tabele

Gage R&R Study - ANOVA Method					
Gage name:		Mikrometar 0-25			
Date of study:		26.03.2023.			
Reported by:		Prof. dr Branko Štrbac			
Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)	StdDev (SD)	Study Var (6×SD)	% Study Var
Total Gage R&R	0,30237	7,76	0,30237	1,81423	27,86
Repeatability	0,19993	3,39	0,19993	1,19960	18,42
Reproducibility	0,22684	4,37	0,22684	1,36103	20,90
Operator	0,22684	4,37	0,22684	1,36103	20,90
Part-to-Part	1,04233	92,24	1,04233	6,25396	96,04
Total Variation	1,08530	100	1,08530	6,51180	100,00
Number of Distinct Categories = 4					

Slika 8.20. Numerička studija GRR u Minitabu primernom ANOVA metode

Primer 8.6. *Gage2* fajl sadrži četiri kolone Deo (**Part**), Operater (**Operator**) i Rezultati merenja (**Response**) i broj ponavljanja (**Trial**), zadnja kolona se ne koristi u studiji. U nastavku su dati rezultati studije primenom ANOVA metode. ANOVA tabele sa interakcijom i bez interakcije prikazane su na slici 8.21.

Two-Way ANOVA Table With Interaction					
Source	<i>DF</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>p</i>
Part	2	38990	19495,2	2,90650	0,166
Operater	2	529	264,3	0,03940	0,962
Part * Operater	4	26830	6707,4	0,90185	0,484
Repeatability	18	133873	7437,4		
Total	26	200222			
α to remove interaction term = 0.05					
Two-Way ANOVA Table Without Interaction					
Source	<i>DF</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>p</i>
Part	2	38990	19495,2	2,66887	0,092
Operater	2	529	264,3	0,03618	0,965
Repeatability	22	160703	7304,7		
Total	26	200222			

Slika 8.21. ANOVA tabele za primer GAGE2

Iz rezultata u ANOVA tabelama se može zaključiti, na osnovu *p* vrednosti, da interakcija između operatera i delova nije statistički značajna, da ne postoje stitistički značajne razlike između delova i između operatera. Takođe, vrednost *MS* greške (u ovom slučaju repeatability) je dosta veće od ostalih *MS* vrednosti što ukazuje da postoji problem sa mernim sistemom. Ovo činjenicu dokazuje i *GRR* studija prikazana na slici 8.22. Sa slike se može uočiti da je merni sistem apsolutno neprihvatljiv (**% Study Var** 91,85 % i **%Contribution (of VarComp)** 84,36) i da merni sistem ima problem sa ponovljivišću. Još jedan pokazatelj za neprihvatanje mernog sistema je broj različitih kategorija koji je u ovom slučaju 1.

Gage R&R Study - ANOVA Method					
Gage name:		Kljunasto pomično merilo (0,05)			
Date of study:		29.03.2023.			
Reported by:		Prof. dr Branko Štrbac			
Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)	StdDev (SD)	Study Var (6×SD)	% Study Var
Total Gage R&R	7304,67	84,36	85,4673	512,804	91,85
Repeatability	7304,67	84,36	85,4673	512,804	91,85
Reproducibility	0	0	0	0	0
Operator	0	0	0	0	0
Part-to-Part	1354,50	15,64	36,8036	220,821	39,55
Total Variation	8659,17	100	93,0547	558,328	100,00
Number of Distinct Categories = 1					

Slika 8.22. Numerička GRR studija za primer Gage2

Na slici 8.23. da je grafički prikaz studije iz koje se zaključuje sledeće:

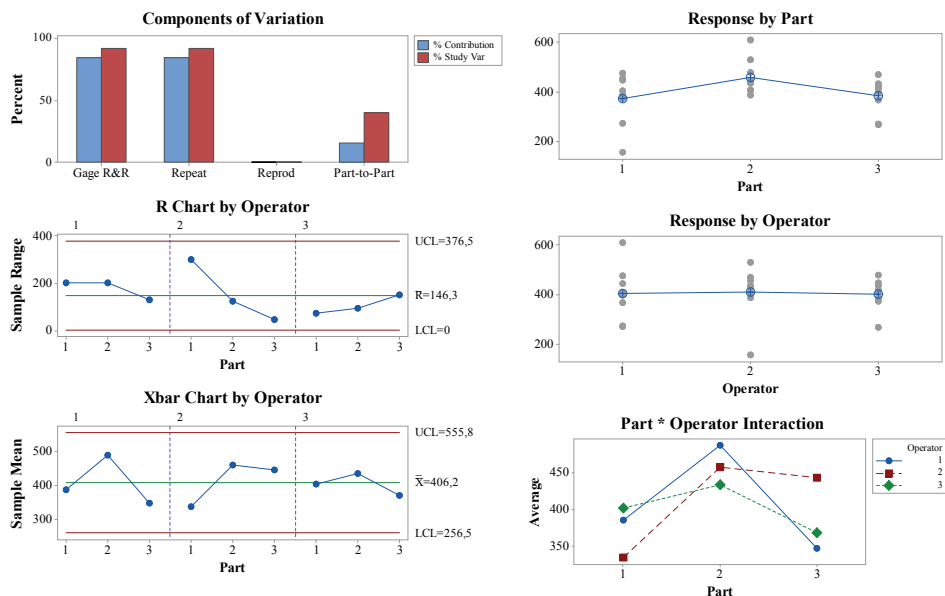
- Histogram grafički pokazuje tvrdnju da najviše varijacije polazi od mernog sistema, i ona se u potpunosti odnosi na ponovljivost merenja. To podrazumeva da verovatno postoje problemi sa mernim instrumentima zbog kojih operateri dobijaju nekonzistentne rezultate
- Na R kontrolnoj karti se vidi da su sva tri operatera izvršila merenja u okviru kontrolnih granica, ali se zato na X karti može ustanoviti da se sve tačke koje označavaju srednju vrednost merenja za svakog operatera nalaze unutar kontrolnih granica (više od 50 % treba da bude van) i može se zaključiti da postoje značajni problemi sa mernim sistemom.
- Na osnovu **Response by Part** dijagrama može se zaključiti da je varijacija za prva dva dela nešto veća u odnosu na deo broj tri što znači da postoje izvesni problemi sa mernim sistemom.
- Na osnovu **Response by Operator** dijagrama može se zaključiti da je linija, koja spaja srednje vrednost, gotovo horizontalna što znači da su srednje vrednosti svih merenja za sva tri operatera bliske jedna drugoj. U ovom slučaju nisu prikazani box-plotovi zbog toga što je izmeren manji broj delova, tačnije tri.

- Poslednji dijagram jasno pokazuje da postoje velike razlike u merenjima između operatera, i da postoji veliki problem sa ponovljivošću jer nijedan operater ne pruža konzistentne rezultate mereći iste delove više puta, a statistika je pokazala da interakcija nije statistički značajna.

Gage R&R (ANOVA) Report for Response

Gage name: Kljunasto pomično merilo
Date of study: 29.03.2023.

Reported by: Prof. dr Branko Štrbac
Tolerance:
Misc: Fakultet tehničkih nauka



Slika 8.23. Grafička GRR studija za primer Gage2

Ugneždjena GRR studija

Kao što je već pomenuto, ugneždjena R&R studija se bira u slučaju kada samo jedan operater meri svaki pojedinačni deo za razliku od ukrštene studije gde merenje vrši veći broj operatera. Ovaj tip studije koristi samo ANOVA metodu koja predstavlja odgovarajuću proceduru za analizu destruktivne studije jer prepoznaje kada su uzorci (delovi) “ugneždjeni” odnosno uklopljeni sa operaterima. To podrazumeva da svaki operater meri različiti deo iz iste grupe, odnosno ne može se dogoditi da dva operatera mere jedan isti deo.

Primer 8.7. Koristi se *Gagenest* koji sadrži tri kolone Delovi (*Part*), Operater (*Operator*) i Rezultati merenja (*Response*). U studiji je ukupno 15 delova i tri operatera gde svaki operater meri po pet delova po dva puta. Pokretanje studije u Minitabu se vrši prema sledećem *Stat > Quality Tools > Gage R&R Study (Nested)*, unos podataka je isti kao kod ukrštene studije.

Na slici 8.24. prikazana je ANOVA tabela koja ne sadrži interakciju operatera i delova. Iz ANOVA se može zaključiti da ne postoje statistički značajne razlike između delova i između operatera i takođe da je vrednost *MS* za grešku (repeatability) velika što ukazuje na problem sa mernim instrumentom. Ova tvrdnja se dokazuje poglednom na numeričku *GRR* studije (slika 8.25.) koja, na osnovu % *Study Var* 90,81 % i % *Contribution (of VarComp)* 82,46, ukazuje da je merni sistem apsolutno neprihvatljiv.

Takođe, merni sistem ne može da razlikuje različite grupe delova i zbog toga je neprihvatljiv. Broj različitih kategorija je samo 1.

Two-Way ANOVA Table					
Source	<i>DF</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>p</i>
Operator	2	0,0142	0,00708	0,00385	0,996
Part (Operator)	12	22,0552	1,83794	1,42549	0,255
Repeatability	15	19,3400	1,28933		
Total	29	41,4094			

Slika 8.24. ANOVA tabela za primer Gagenest

Gage R&R Study – ANOVA Method					
Gage name:		1D mašina za merenje dužina			
Date of study:		29.03.2023.			
Reported by:		Prof. dr Branko Štrbac			
Source	VarComp	%Contribution (of VarComp)	StdDev (SD)	Study Var (6×SD)	% Study Var
Total Gage R&R	1,28933	82,46	1,13549	6,81293	90,81
Repeatability	1,28933	82,46	1,13549	6,81293	90,81
Reproducibility	0	0	0	0	0
Part-to-Part	0,27430	17,54	0,52374	3,14243	41,88
Total Variation	1,56364	100	1,25045	7,50273	100,00
Number of Distinct Categories = 1					

Slika 8.25. Numerička *GRR* studija za primer Gagenest

Na slici 8.26. prikazana je grafička studija za primer **Gagenest**. Na histogramu se vidi da komponenta ponovljivosti u potpunosti doprinosi varijaciji mernog sistema dok su varijacije između delova mnogo manje.

Na R karti rasponi rezultata merenja svih operatera su u kontrolnim granicama što ne ukazuje na probleme.

Na X karti se jasno vidi da su sve tačke unutar kontrolnih granica što podrazumeva da postoje značajne varijacije mernog sistema.

Dijagram **Response by Part (Operator)** je drugačiji kod ugneždene studije i prikazuje pojedinačna merenja za sve delove koje je merio svaki pojedinačni operater.

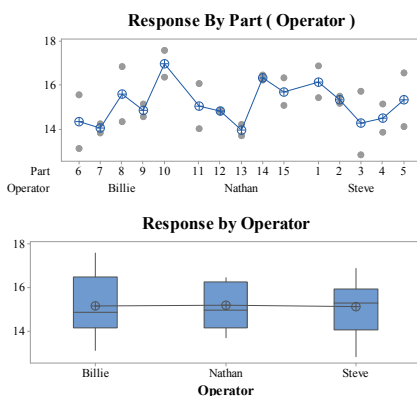
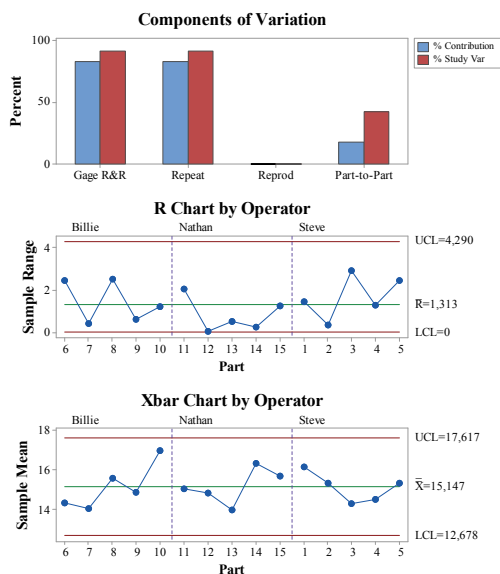
Poslednji dijagram, razlike između operatera, pokazuje da nema nikakvih razlika između njih i da su srednje vrednosti za svakog podjednake (tačke na box-plotovima); linija je horizontalna.

S obzirom da ugneždjena studija ne razmatra interakciju operater-deo, prozor sa grafičkim prikazima se sastoji iz ukupno pet dijagrama izuzimajući poslednji koji se prikazuje u ukrštenoj studiji.

Gage R&R (Nested) Report for Response

Gage name: 1D mašina za merenje dužina
Date of study: 29.03.2023.

Reported by: Prof. dr Branko Štrbac
Tolerance:
Misc: Fakultet tehničkih nauka



Slika 8.26. Grafička GRR studija za primer *Gagenest*

8.5. Analiza mernih sistema za atributivne karakteristike kvaliteta

Merni sistemi za atributivne karakteristike kvaliteta su vrste mernih sistema u kojima je vrednost merenja jedna od konačnog broja kategorija. Ovo je kontradiktorno mernim sistemima za numeričke karakteristike kvaliteta čiji su rezultati merenja kontinuirane vrednosti. Najčešći od atributivnih mernih sistema je tolerancijko merilo “*dobar/loš*” koji ima samo dva moguća rezultata. Ostali atributni sistemi, na primer vizuelni standardi, mogu da razultuju od pet do sedam različitih kategorija.

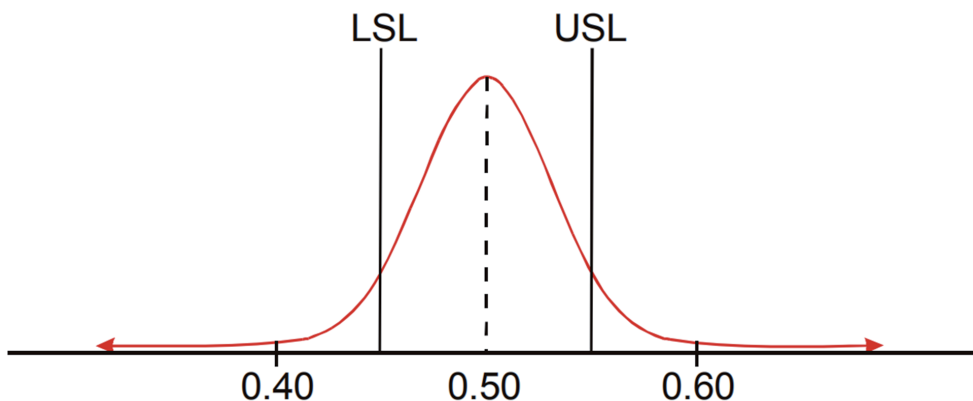
8.5.1. Metode analize rizika

U nekim situacijama kod atributivnih karakteristika nije moguće dobiti dovoljno delova sa promenljivim referentnim vrednostima. U takvim slučajevima, rizici donošenja pogrešnih ili nedoslednih odluka mogu se proceniti korišćenjem:

- Analizama testova hipoteza
- Teorijom otkrivanja signala

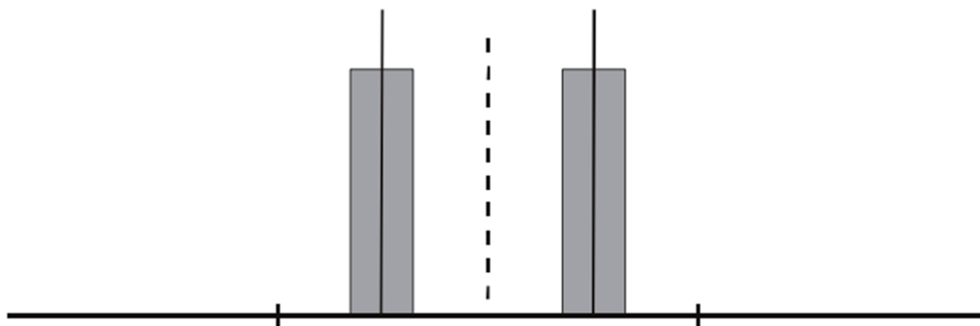
Pošto ove metode ne kvantifikuju varijabilnost mernog sistema, treba ih koristiti samo uz saglasnost kupca. Izbor i upotreba takvih tehnika treba da se zasniva na dobroj statističkoj praksi, razumevanju potencijalnih izvora varijacije koje mogu uticati na proizvod i procese merenja, kao i efektu pogrešne odluke na preostale procese i krajnjeg kupca. Izvori varijabilnosti atributivnih mernih sistema trebalo bi da budu minimizirani korišćenjem rezultata ljudskih faktora i ergonomskeg istraživanja. Razmatra se sledeći scenario.

Proces proizvodnje je u statističkoj kontroli i ima indekse performansi $Pp=Ppk=0,5$ što je neprihvatljivo, slika 8.27. Budući da se u procesu dobijaju neusklađeni proizvodi, potrebno je primeniti akciju uklanjanja neprihvatljivih delova iz proizvodnog toka.



Slika 8.27. Primer procesa sa $Pp = Ppk=0,50$

Za aktivnost „uklanjanja“ procesni tim je odabrao atributivno merilo (tolerancijsko merilo) koje poredi svaki deo sa određenim setom ograničenja i prihvata deo ako su ograničenja zadovoljena; u suprotnom odbacuje deo. Većina merila ove vrste podešena je da prihvati ili odbije delove na osnovu niza master delova. Za razliku od mernih sistema čiji rezultat su numeričke karakteristike, merila za atributivne karakteristike ne mogu ukazivati na to koliko je deo dobar ili koliko je deo loš, već samo da li se deo prihvata ili odbacuje (tj. 2 kategorije). Kao i kod svih merila, ova atributivna merila će imati „sive“ oblasti gde se može doneti pogrešna odluka, slika 8.28.



Slika 8.28. Siva zona pridružena rezultatu merenja

Obzirom da to još nije dokumentovano od strane tima, potrebno je prostudirati merni sistem. Međutim, da bi se rešilo područje rizika oko specifičnih ograničenja, tim izabere približno 25 % delova ili blizu donje granice specifikacije i 25 % delova ili blizu gornje granice specifikacije. U nekim slučajevima kada je teško proizvesti takve delove tim može odlučiti da koristi niži procenat prepoznavajući da to može povećati varijabilnost rezultata. Ako je nemoguće napraviti delove blizu specifikacijskih ograničenja tim bi trebalo da preispita upotrebu atributivnog merila za taj proces. Kao što je prikladno za svaku karakteristiku, delove treba nezavisno meriti sa merilom za numeričke karakteristike sa prihvatljivom varijabilnosti (npr. KMM). Koriste se tri operatera pri čemu svaki donosi tri odluke za svaki deo.

U tabeli 8.7. dat je primer analize mernog sistema za atributivne karakteristike kvaliteta. Odluka da se deo prihvata se označava sa jedan (1) a ne prihvatana sa nula (0). Opetareti su obeleženi sa **A**, **B** i **C** a oznaka A-1 je merenje operatera A prvi put, itd. **Referenca i referentna vrednost** prikazane u tabeli 8.7. u početku nisu određene. Tabela takođe ukazuje u koloni *Kod* da li je deo u oblasti I, oblasti II ili oblast III označeno preko „-“, „x“ i „+“.

Tabela 8.7. *Primer za analizu mernog sistema za atributivne karakteristike kvaliteta*

Deo	A-1	A-2	A-3	B-1	B-2	B-3	C-1	C-2	C-3	Referenca	Ref. vrednost	Kod
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,476901	+
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,509015	+
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,576459	–
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,566152	–
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,57036	–
6	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0,544951	x
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0,465454	x
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,502295	+
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,437817	–
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,515573	+
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,488905	+
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,559918	x
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,542704	+
14	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0,454518	x
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,517377	+
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,531939	+
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,519694	+
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,484167	+
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,520496	+
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,477236	+
21	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0,45231	x
22	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0,545604	x
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,529065	+
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,514192	+
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,599581	–
26	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0,547204	x
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,502436	+
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,521642	+
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,523754	+
30	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,561457	x
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,503091	+
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,50585	+
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,487613	+

34	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0,449696	x
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,498698	+
36	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0,543077	x
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,409238	–
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,488184	+
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,427687	–
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,501132	+
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,513779	+
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,566575	–
43	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0,46241	x
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,470832	+
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,412453	–
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,493441	+
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,486379	+
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,587893	–
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,483803	+
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,446697	–

8.5.2. Analiza hipoteze testa – metoda unakrsnih tabela

Pošto tim ne zna referentne odluke za delove, oni razvijaju unakrsne tabele upoređujući svakog operatera sa drugim. Proces unakrsnih tabela analizira raspodele podataka za dve ili više kategoričkih promenljivih. Rezultati – predstavljeni u matičnom obliku – formiraju tabelu nepredviđenih slučajeva koja ilustruje međuzavisnost među promenljivima.

Prvi korak je sumiranje posmatranih podataka. Pregledom tabele 8.7. tim ispituje podatke za parove posmatranja, računajući kada su se složili i kada se nisu složili oko svakog skupa procene. Odnosno, za procene, postoje 34 puta gde je A-1=1 i B-1=1; postoje 32 puta gde je A-2=1 i B-2=1; i postoji 31 put gde A-3=1 i B-3=1 za ukupno slaganja 97. Tabela 8.8. rezimira raspodelu podataka za posmatrački par A*B. Slične tabele (tabela 8.9. i 8.10.) su napravljene za posmatračke parove B*C i A*C.

Drugi korak je procena očekivane raspodele podataka. Koja je verovatnoća da će se posmatrački par složiti ili ne pri posmatranju. U 150 posmatranja operater A je odbacio deo 50 puta, a operater B je 47 puta odbio deo:

$$p_{A0} = \frac{47}{150} = 0,313$$

$$p_{B0} = \frac{50}{150} = 0,333$$

Pošto su dva operatera nezavisna, verovatnoća da se slažu da je deo loš je:

$$p(A0 \cap B0) = p_{A0} p_{B0} = 0,104$$

Očekivani broj puta da se operater A i operater B slažu da je deo loš procenjuje se množenjem kombinovane verovatnoće sa brojem zapažanja:

$$150 \times (p_{A0} p_{B0}) = 150 \times \left(\frac{47}{150} \right) \times (50/150) = 15,7$$

Tim može da napravi slične procene svakog para kategorija za svaki par posmatrača kako bi se popunile sledeće tabele 8.8., 8.9. i 8.10.

Tabela 8.8. $A \times B$ unakrsna tabela

		B		Ukupno
		0	1	
A	0 Rezultat	44	6	50
	Očekivan rezultat	15,7	34,3	50
	1 Rezultat	3	97	100
	Očekivan rezultat	31,3	68,7	100,0
Ukupno	Rezultat	47	103	150
	Očekivan rezultat	47	103	150

Tabela 8.9. $B \times C$ unakrsna tabela

		C		Ukupno
		0	1	
B	0 Rezultat	42	5	47
	Očekivan rezultat	16	31	47
	1 Rezultat	9	94	103
	Očekivan rezultat	35	68	103
Ukupno	Rezultat	51	99	150
	Očekivan rezultat	51	99	150

Tabela 8.10. $A \times C$ unakrsna tabela

		C		Ukupno
		0	1	
A	0 Rezultat	43	7	50
	Očekivan rezultat	17	33	50
	1 Rezultat	8	92	100
	Očekivan rezultat	34	66	100
Ukupno	Rezultat	51	99	150
	Očekivan rezultat	51	99	150

Svrha ovih tabela jeste da se utvrdi opseg dogovora između operatera. Da bi se odredio nivo ovog sporazuma, tim koristi (Kohenovu) *kappu* koja meri sporazum između ocena dva operatera kada oba ocenjuju isti objekat. Vrednost 1 ukazuje na savršeno slaganje. Vrednost 0 znači da slaganje nije

bolje od slučajnosti. *Kappa* je dostupna samo za tablice u kojima obe promenljive koriste iste vrednosti kategorija, a obe promenljive imaju isti broj kategorija. *Kappa* je mera međusobnog slaganja koja testira da li se računi u dijagonalnim ćelijama (delovi koji imaju istu ocenu) razlikuju od onih koji se očekuju slučajno. Neka je:

p_0 – zbir posmatranih proporcija u dijagonalnim ćelijama

p_e – zbir očekivanih proporcija u dijagonalnim ćelijama

tada je

$$kappa = \frac{p_0 - p_e}{1 - p_e} \quad (8.21.)$$

Kappa je više mera nego test. Procenjuje se korišćenjem asimptotske standardne greške za konstrukciju *t* statistike. Opšte je pravilo da vrednosti *kappa* veće od 0,75 ukazuju dobro do izvrsno slaganje (sa maksimalno *kappa*=1); vrednosti manje od 0,40 ukazuju na loše slaganje.

Kappa ne uzima u obzir veličinu neslaganja između operatera, već samo slažu li se oni ili ne.

Primer izračunavanja *kappa* za A×B

$$kappa = \frac{p_0 - p_e}{1 - p_e} = \frac{\frac{44+97}{150} - \frac{15,7+68,7}{150}}{1 - \frac{15,7+68,7}{150}} = \frac{0,94-0,56}{1-0,56} = 0,86$$

Nakon izračunavanja *kappa* mera za operatera, tim je konstruisao tabelu 8.11.

Tabela 8.11. *Kappa procene*

Kappa	A	B	C
A	-	0,86	0,78
B	0,86	-	0,79
C	0,78	0,79	-

Ova analiza pokazuje da se svi operateri dobro međusobno slažu. Ova analiza je neophodna da bi se utvrdilo postoje li razlike među operaterima, ali ne govori koliko dobro merni sistem sortira dobre delove od loših. Za ovu analizu potrebno je izvršiti procenu delova pomoću numeričkog mernog sistema i koristiti rezultate da se odrede referentne odluke.

Sa ovim novim informacijama razvijena je druga grupa unakrsnih tabela upoređujući svakog operatera sa referentnom odlukom.

Tabela 8.12. *A*REF unakrsna tabela*

		REF		Ukupno
		0	1	
A	0 Rezultat	45	5	50
	Očekivan rezultat	16	34	50
	1 Rezultat	3	97	100
	Očekivan rezultat	32	68	100
Ukupno	Rezultat	48	102	150
	Očekivan rezultat	48	102	150

Tabela 8.13. *B*REF unakrsna tabela*

		REF		Ukupno
		0	1	
B	0 Rezultat	45	2	47
	Očekivan rezultat	15	32	47
	1 Rezultat	3	100	103
	Očekivan rezultat	33	70.0	103
Ukupno	Rezultat	48	102	150
	Očekivan rezultat	48	102	150

Tabela 8.14. *C*REF unakrsna tabela*

		REF		Ukupno
		0	1	
C	0 Rezultat	42	9	51
	Očekivan rezultat	16,3	34,7	51
	1 Rezultat	6	93	99
	Očekivan rezultat	31,7	67,3	99
Ukupno	Rezultat	48	102	150
	Očekivan rezultat	48	102	150

Zatim se takođe računa *kappa* mera kako bi utvrdila saglasnost između svakog operatera sa referentnom odlukom, tabela 8.15.

Tabela 8.15. *Kappa tabela – operater u odnosu na referentnu vrednost*

<i>Kappa</i>	A	B	C
	0,88	0,92	0,77

Rezultati se mogu protumačiti da svaki operater ima dobro slaganje sa referentnom vrednosti.

Zatim procesni tim određuje efektivnost mernog sistema prema sledećem:

$$\text{efektivnost} = \frac{\text{broj ispravnih odluka}}{\text{ukupne mogućnosti za odluke}}$$

Tabela 8.16. *Efektivnost studije*

Izvor	% operatora ¹			% procenat ocene u odnosu na atribut ²		
	Operator A	Operator B	Operator C	Operator A	Operator B	Operator C
Ukupno pregledanih	50	50	50	50	50	50
# odgovara	42	45	40	42	45	40
Lažno negativno (operator je pristrasan prema odbijanju)				0	0	0
Lažno pozitivnih (operator je pristrasan prema prihvatanju)				0	0	0
Pomešan				8	5	10
95 % UCI	93 %	97 %	90 %	93 %	97 %	90 %
Izračunati rezultati	84 %	90 %	80 %	84 %	90 %	80 %
95 % LCI	71 %	78 %	66 %	71 %	78 %	66 %
Izvor	Sistem % efektivna ocena ³			Sistem % efektivna ocena u odnosu na referencu ⁴		
Ukupno pregledanih	50			50		
# odgovara	39			39		
95% UCI	89 %			89 %		
Izračunati rezultati	78 %			78 %		
95% LCI	64 %			64 %		

Napomene:

- (1) operator se slaže sa sobom u svim ispitivanjima
- (2) operator se slaže u svim ispitivanjima sa poznatim standardom
- (3) svi operatori su saglasni između sebe
- (4) svi operatori su saglasni između sebe i saglasni sa referencom
- (5) UCI i LCI su gornja i donja granica intervala pouzdanosti

Višestruki testovi hipoteza između svakog para operatera mogu se sprovesti sa nultom hipotezom:

$$H_0: \text{efektivnost dva operatera je ista}$$

Budući da izračunati rezultat svakog operatera spada u interval pouzdanosti drugog, tim zaključuje da ne mogu odbiti nultu hipotezu. To pojačava zaključke iz *kappa* rezultata. Za dalju analizu, kreira se tabela 8.17. koja sadrži smernice za rezultate svakog operatera.

Tabela 8.17. *Smernice za kriterijume efikasnosti*

Odluka Merni sistem	Efektivnost	Stopa promašaja	Stopa lažnih uzbuna
Prihvatljivo za operatera	$\geq 90 \%$	$\leq 2 \%$	$\leq 5 \%$
Marginalno prihvatljivo za operatera – možda treba da se unapredi	$\geq 90 \%$	$\leq 5 \%$	$\leq 10 \%$
Neprihvatljivo za operatera – treba unapređenje	$< 80 \%$	$> 5 \%$	$> 10 \%$

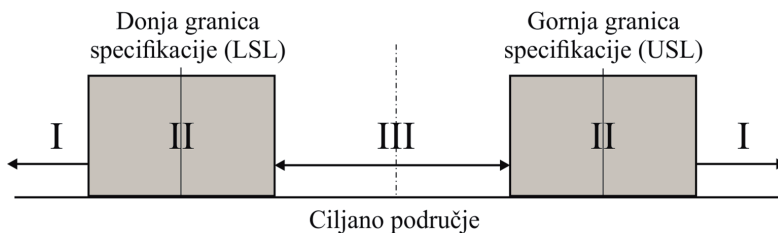
Sumirajući sve informacije koje postoje, kreira se tabela 8.18.

Tabela 8.18. *Sažetak studije efikasnosti*

	Efektivnost	Stopa promašaja	Stopa lažnih uzbuna
A	84 %	6,3 %	4,9 %
B	90 %	6,3 %	2 %
C	80 %	12,5 %	8,8 %

Ovi rezultati su pokazali da merni sistem ima različite nivoe performansi u efektivnosti, stopi promašaja i stopi lažnih uzbuna. Ni jedan pojedinačan operater nije imao prihvatljive rezultate u sve tri kategorije. Ni jedan pojedinačan operater nije imao neprihvatljive rezultate u sve tri kategorije. Da li zbog toga treba promeniti smernice za prihvatanje procesa? Da li su ovi rizici prihvatljivi? Da li operaterima treba bolja obuka? Da li bi se okruženje za testiranje moglo poboljšati? Najvažnije šta kupac misli o mernom sistemu i ovim rezultatima. I na kraju, da li kupac prihvata ove nivoe rizika?

Uvek se postavlja pitanje. „Koliko uzoraka treba koristiti u studiji?“ Odgovor je „dovoljan“. Svrha bilo koje studije mernog sistema (numeričkog ili atributivnog) je razumevanje mernog sistema. Dovoljan broj uzoraka treba odabrati da pokrije očekivani radni opseg. Kod atributivnih mernih sistema područje interesovanja je Tip II odlasti, slika 8.29.



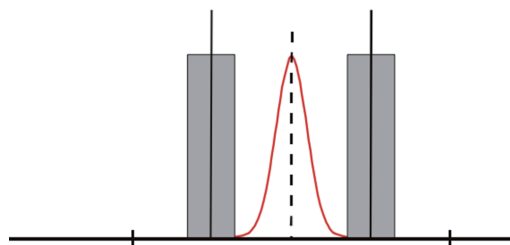
Slika 8.29. Granice specifikacije sa predelima nesigurnosti

Polje II je područje gde potencionalno može da se donese pogrešna odluka. Polje III je područje gde su dobri delovi uvek dobri a I polje gde su loši delovi uvek loši. Ako je svojstvena procena sposobnosti dobra (tj. veliko C_p , C_{pk} ili P_p , P_{pk}) tada mali slučajni uzorak možda neće imati mnogo (ili bilo koji) uzoraka u ovoj oblasti. Ovo znači da kako se poboljšava sposobnost procesa, potreban slučajni uzorak za proučavanje atributivnih mernih sistema treba da bude veći. U gornjem primeru, indeksi su bili P_p , $P_{pk}=0.5$ (tj. očekivane performanse procesa od približno 13% neusklađenosti) i biran je uzorak od 50 komada.

Alternativni pristup velikim uzorcima je „soljeni uzorak“ gde su delovi izabrani posebni iz polja II da povećava slučajnost uzorka kako bi se osiguralo da se vidi efekat varijabilnosti operatera.

Problemi koji se javljaju primenom metode unakrsnih tabela su:

- (1) Ne postoje kriterijumi odlučivanja zasnovani na teoriji za prihvatljivi rizik. Gore navedene smernice su heurističke i razvijene na temelju individualnih „uverenja“ o tome šta će proći kao „prihvatljivo“. Kriterijumi za konačnu odluku trebaju se zasnovati na uticaju (tj. riziku) na preostali postupak i krajnjeg kupca. Ovo je predmetna odluka, a ne statistička.
- (2) Gornja analiza zavisi o podacima. Na primer, ako su indeksi procesa $P_p = P_{pk} = 1,33$, tada bi sve odluke bile ispravne, jer nijedan deo ne bi pao u polje II („siva regija“) mernog sistema, slika 8.30. U ovom slučaju, može se zaključiti da su svi operateri prihvatljivi jer neće biti grešaka u odluci.



Slika 8.30. Primer procesa sa $P_p=P_{pk}=1.33$

- (3) Obično postoji pogrešna pretpostavka o tome šta rezultati unakrsnog prebrojavanja zaista znače. Na primer, rezultati operatera B su:

		REF		Ukupno
		0	1	
B	0 Rezultat	45	2	47
	% u okvir REF	93,8 %	2 %	31.3 %
	1 Rezultat	3	100	103
	% u okvir REF	6.3 %	98.0 %	68.7 %
Ukupno	Rezultat	48	102	150
	% u okvir REF	100 %	100 %	100 %

Budući da je svrha merenja pronaći sve neusaglašene delove, većina ljudi gleda na gornji levi ugao kao meru efikasnosti pronalaska loših delova. Ovaj procenat je verovatnoća da se kaže da je deo loš obzirom da je loš:

$$Pr(\text{deo se naziva loš} / \text{deo je loš})$$

Pod pretpostavkom da je postupak poboljššan na $Pp = Ppk = 1,00$, verovatnoća od interesa za proizvođača je:

$$Pr(\text{deo je loš} / \text{deo se naziva loš})$$

Da bi se ovo odredilo iz gornjih podataka, koristi se Bayes-ova teorema:

$$Pr(\text{loš} | \text{zove se loš}) = \frac{Pr(\text{zove se loš} | \text{loš}) * Pr(\text{loš})}{Pr(\text{zove se loš} | \text{loš}) * Pr(\text{loš}) + Pr(\text{zove se loš} | \text{dobar}) * Pr(\text{dobar})}$$

$$Pr(\text{loš} | \text{zove se loš}) = \frac{0.938 * 0.0027}{0.938 * 0.0027 + 0.020 * 0.9973}$$

$$Pr(\text{loš} | \text{zove se loš}) = 0.11$$

Odnosno, ovi rezultati ukazuju da ako se deo naziva lošim postoji samo 1 od 10 šansi da je zaista loš.

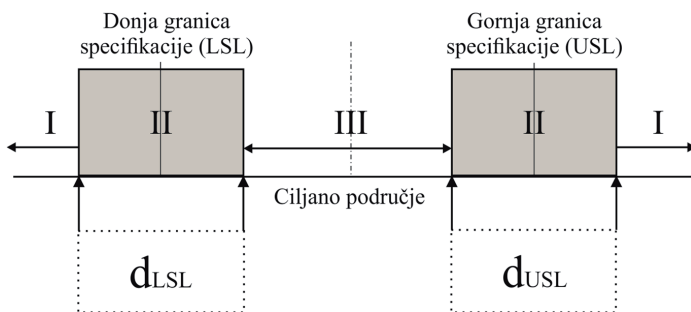
- (4) Analize ne koriste informacije o promenljivim podacima ili čak informacije o relativnom redosledu koje su bile dostupne kada su utvrđene referentne vrednosti odluke.

8.5.3. Teorija otkrivanja signala

Alternativni pristup je korištenje teorije otkrivanja signala za određivanje aproksimacije širine područja polja II i iz ovoga se sprovodi studija ponovljivosti i reproduktivnosti mernog sistema. Ovo zahteva da svaki deo u uzorku meri na numeričkom mernom sistemu. Ove referentne vrednosti su prikazane u koloni **Ref. vrednost** u tabeli 8.7.

Za sprovođenje ovog pristupa potrebno je sledeće:

- (1) Određivanje tolerancijskog (specifikacijskog) opsega iz 8.27: $USL=0.550$ i $LSL=0.450$. Onda je tolerancija jednaka $USL - LSL=0.1$. Ova vrednost će se koristiti za izračunavanje GRR . Ako $Ppk > 1$, merni sistem se poredi sa procesom, a ako je $Ppk < 1$, merni sistem se poredi sa tolerancijom. Ovo „pravilo“ predstavlja upoređivanje mernog sistema sa onim što je najrelevantnije, sa procesom ili tolerancijom. U ovom primeru, $Ppk=0.5$, tako da je proces veći od tolerancije i ovaj merni sistem stoga treba uporediti sa tolerancijom.
- (2) Sortirati vrednosti u koloni **Ref. vrednosti** zajedno sa kolonom **Kod** od najvećih do najmanjih, tabela 8.19.
- (3) Utvrditi početne i krajnje tačke dve oblasti II. U tabeli 8.19. oblast II je prikazana preko kolone Kod: + = prihvatanje sa ukupnim slaganjem; - = odbijanje sa ukupnim slaganjem; x – neslaganje. Širina ovih zona je ono što se pokušava utvrditi, a prosečna širina ovih zona koristiće se za upoređivanje mernog sistema sa specifikacijom tolerancije, ili sa procesom 6 sigma širina (u zavisnosti od situacije).
- (4) Iz tabele 8.19. d_{USL} predstavlja rastojanje između zadnjeg prihvaćenog dela od strane svih operatera do prvog dela koji su odbili svi operateri. Ovo rastojanje je jednako sivoj oblasti II koja okružuju USL iznad, ograničeno sa gornjom zonom I desno i zonom III levo, slika 8.31. Ove vrednosti su uokvirene u tabeli 8.19. Polje I su delovi koji su odbijeni od svih operatera, polje III su delovi prihvaćeni od svih operatera a polje II su sporni delovi bez 100 % saglasnosti koja okružuje specifikacijske granice.



Slika 8.31. Polje d_{LSL} i d_{USL}

5) neka je d_{LSL} rastojanje između zadnjeg dela prihvaćenog od svih operatera u polju III do prvog odbijenog dela od svih operatera u polju I.

d_i predstavlja rastojanje između zadnjeg prihvaćenog dela od svih operatera do prvog odbijenog dela od strane svih operatera (za svaku specifikaciju). Zatim, d = srednja vrednost (d_i) je procena širine polja II i, prema tome, procena $GRR=6*\sigma_{GRR}$. „Dobrota“ ove procene zavisi od veličine uzorka i od toga koliko blizu uzorak predstavlja proces. Što je uzorak veći, bolja je procena.

Tabela 8.19. Sortirane referentne vrednosti od najveće do najmanje

	Ref. vrednost	Kod	Ref. vrednost	Kod
	0,599581	–	0,503091	+
	0,587893	–	0,502436	+
	0,576459	–	0,502295	+
	0,57036	–	0,501132	+
	0,566575	–	0,498698	+
	0,566152	–	0,493441	+
d_{USL}	0,561457	x	0,488905	+
	0,559918	x	0,488184	+
	0,547204	x	0,487613	+
	0,545604	x	0,486379	+
	0,544951	x	0,484167	+
	0,543077	x	0,483803	+
	0,542704	+	0,477236	+
	0,531939	+	0,476901	+
	0,529065	+	0,470832	+
	0,523754	+	0,465454	x
	0,521642	+	0,46241	x
	0,520496	+	0,454518	x
	0,519694	+	0,45231	x
	0,517377	+	0,449696	x
	0,515573	+	0,446697	–
	0,514192	+	0,437817	–
	0,513779	+	0,427687	–
	0,509015	+	0,412453	–
	0,50585	+	0,409238	–

U ovom primeru gde je tolerancija 0.100:

$$d_{LSL}=0,470832-0,446697=0,024135$$

$$d_{USL}=0,566152-0,542704=0,023448$$

$d=0,0237915$ ili procenjeno % GRR je % $GRR=24$ % Pošto je ovaj primer generisan mernim sistemom sa stvarnim $GRR=25$ %, ova procena će dovesti do iste procene mernog sistema.

Ako su dostupne samo informacije u nizu, ova tehnika se može i dalje koristiti ali zahteva subjektivno znanje za kvantifikovanje d .

8.5.4. *Analitička metoda*

Kao i kod bilo kog mernog sistema, stabilnost procesa treba da bude verifikovana, i ako je potrebno, pregledana. Kod mernih sistema za atributivne karakteristike, atributivne kontrolne karte konstantnog uzorka tokom vremena su uobičajeni način provere stabilnosti.

Za atributivne merne sisteme, koncept „krive performansi merila“ se koristi za razvijanje studije mernog sistema koja se koristi za procenu veličine ponovljivosti i biasa mernog sistema. Ove analize se mogu koristiti za merne sisteme sa pojedinačnim ili dvostrukim ograničenjima. Za merne sisteme sa dvostrukim ograničenjem, potrebno je ispitati samo jednu granicu sa protpostavkama linearnosti i uniformnosti greške. Donja granica će se koristiti za diskusiju radi lakšeg razumevanja.

Generalo, studija mernih sistema za atributivne karakteristika sadrži dobijanje referentnih vrednosti za nekoliko izabranih delova. Ovi delovi se procenjuju nekoliko puta (m) sa ukupnim brojem prihvatanja (a) za svaki deo koji se razmatra. Iz rezultata se mogu proceniti ponovljivost i bias.

Prva faza studije mernih sistema za atributivne karakteristike je izbor dela. Neophodno je da **referentne vrednosti budu poznate** za svaki deo korišćen u studiji. Osam delova treba izabrati u skoro jednakim intervalima. Maksimalne i minimalne vrednosti treba da predstavljaju raspon procesa. Iako ovaj izbor ne utiče na poverenje u rezultate, utiče na ukupan broj delova potrebnih da kompletiraju studiju merila. Osam delova mora proći kroz merilo, $m=20$ i broj prihvaćenih delova (a) se razmatra.

Za kompletnu studiju, najmanji deo mora imati vrednost $a=0$; najveći deo $a=20$; i ostalih šest delova $1 \leq a \leq 19$. Ako ovaj kriterijum nije zadovoljen, više delova sa poznatim referentnim vrednostima, (X), mora proći kroz merilo dok se ovaj kriterijum ne zadovolji. Ako, najmanja vrednost $a \neq 0$, uzimaju se manji i manji delovi i procenjuje se do 0. Ako, najveću vrednost $a \neq 20$, uzimaju se veći i veći delovi i procenjuje se do $a=20$. Ako šest delova nije zadovoljilo kriterijum $1 \leq a \leq 19$, dodatni delovi mogu da se uzmu na odabranim tačkama u čitavom rasponu. Ove tačke se uzimaju na sredini već merenih delova u studiji. Prvi interval na kraju $a=0$ startuje od najveće mere gde je $a=0$. Za kraj $a=20$, prvi interval počinje od najmanjeg merenja gde je $a=20$. Za najbolje rezultate, uzorke treba uzeti na krajevima $a=0$ i $a=20$ i dalje, prema srediti raspona delova. Ako je potrebno, postupak treba ponavljati dok se ne ispune kriterijumi.

Kada se zadovolje kriterijumi za prikupljanje podataka, verovatnoće prihvatljivosti se moraju izračunati za svaki deo koristeći sledeće jednačine 8.22:

$$P'_a = \begin{cases} \frac{a+0.5}{m} & \text{ako } \frac{a}{m} < 0.5 \quad a \neq 0 \\ \frac{a-0.5}{m} & \text{ako } \frac{a}{m} > 0.5 \quad a \neq 20 \\ 0.5 & \text{ako } \frac{a}{m} = 0.5 \end{cases} \quad (8.22.)$$

Prilagođavanja pokrivaju slučajeve gde je $1 \leq a \leq 19$. Za slučajeve gde $a=0$ tada je $P'_a=0$ osim najveće referentne vrednosti sa $a=0$ u kojoj je $P'_a=0.025$. Za slučajeve gde je $a=20$, $P'_a=1$ osim za najmanju referentnu vrednost sa $a=20$ u kojoj je $P'_a=0.975$.

Kada se P'_a izračuna za svako X_T , može se konstruisati kriva performanse merila (GPC). Iako se kriva performanse merila može predstaviti grafički, upotreba papira normalne raspodele daje tačnije procene ponovljivosti i biasa.

Izračunate verovatnoće se nanose na papir normalne raspodele i povlači se linija koja se najbolje fituje kroz tačke. Bias je jednak donjem ograničenju minus referentna vrednost merenja koja odgovara $P'_a=0.5$

ili

$$\text{bias} = \text{donja granica specifikacije} - X_T(\text{na } P'_a=0.5)$$

Ponovljivost se određuje pronalaženjem razlike referentne vrednosti merenja koja odgovara $P'_a=0.995$ i $P'_a=0.005$ podeljeno sa faktorom prilagođavanja 1,08.

$$\text{ponovljivost} = \frac{X_T(\text{na } P'_a=0.995) - X_T(\text{na } P'_a=0.005)}{1,08}$$

Da bi se utvrdilo da li se bias značajno razlikuje je od nule, koristi se jednačina 8.23:

$$t = \frac{6.078 \times |\text{bias}|}{\sigma_{\text{ponovljivost}}} \quad (8.23.)$$

Ako je ova izračunata vrednost veća od 2,093 ($t_{0.025,19}$) tada se bias statistički značajno razlikuje od nule.

Primer 8.8: Atributivno merilo se koristi za merenje dimenzija sa tolerancijom ± 0.010 mm. Merilo je 100 % automatski koje je pod uticajem ponovljivosti i biasa. Za sprovođenje atributivne studije, osam delova sa referentnim vrednostima u intervalima 0.002 od -0.016 do -0.002 su prošli kroz merilo 20 puta. Broj prihvatanja za svaki deo dat je u tabeli 8.20:

Tabela 8.20. Broj prihvatanja za svaki deo

X_T	a
-0.016	0
-0.014	3
-0.012	8
-0.010	20
-0.008	20
-0.006	20
-0.004	20
-0.002	20

Pošto postoje dve referentne vrednosti sa $1 \leq a \leq 19$ moraju se naći još najmanje četiri dela. Stoga je potrebno pregledati delove sa referentnim vrednostima na sredini postojećih intervala. Ove referentne vrednosti i brojevi prihvatanja date su u tabeli 8.21:

Tabela 8.21. Nove referentne vrednosti i broj prihvatanja

X_T	a
-0.015	1
-0.013	5
-0.011	16

Sada postoji pet referentnih vrednosti u granicama $1 \leq a \leq 19$. Procedura zahteva još jedan deo koji mora da bude u granica $1 \leq a \leq 19$. Sledeći deo je dat u tabeli 8.22:

Tabela 8.22. Referenta vrednost i broj prihvatanja za ispunjenje kriterijuma

X_T	a
-0.0105	18

Sada kada su kriterijumi za prikupljanje podataka ispunjeni, mogu se izračunati verovatnoće prihvatanja korišćenjem binomnih prilagođavanja, tabela 8.23.

Tabela 8.23. Vrednosti verovatnoća prihvatanja

X_T	a	P'_a
-0,016	0	0,025
-0,015	1	0,075
-0,014	3	0,175
-0,013	5	0,275
-0,012	8	0,425
-0,011	16	0,775
-0,0105	18	0,875
-0,010	20	0,975
-0,008	20	1

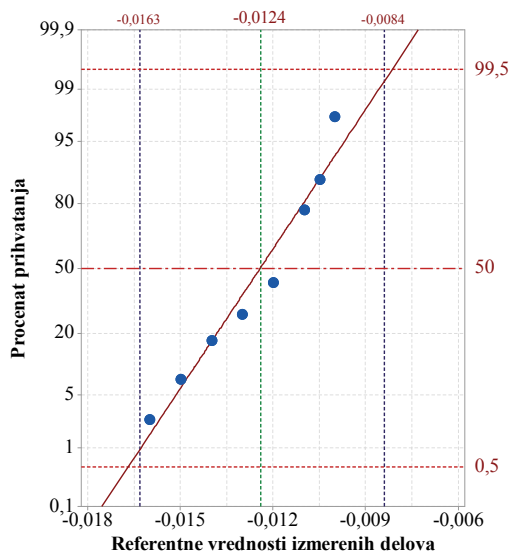
Za dobijanje best fit linije na bazi ovih verovatnoća, biasa i ponovljivost koristi se Minitab. Koriste se opcije **Stat > Quality Tools > Attribute Gage Study (Analytic Method)**. Popunjen prozor za sprovođenje studije prikazan je na slici 8.31. Na slici 8.32. prikazani su rezultati studije.

Slika 8.31. Sprovođenje studije atributivnog merila primenom analitičke metode u Minitabu

Analitička studija atributivnog merila

Gage name: Pneumatski komparator
Date of study: 05.04.2023.

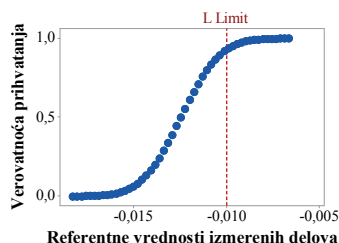
Reported by: Prof. dr Branko Štrbac
Tolerance:
Misc: Fakultet tehničkih nauka



Bias: 0,0024271
Pre-adjusted Repeatability: 0,0085512
Repeatability: 0,0079177

Fitted Line: $7,48669 + 602,451 \times \text{Reference}$
R-sq for Fitted Line: 0,955080

AIAG Test of Bias = 0 vs $\neq 0$
T DF P-Value
9,60564 19 0,0000000



Slika 8.32. Rezultati studije atributivnog merila primenom analitičke metode u Minitabu

Bias se određuje kao razlika donjeg ograničenja i referentne vrednosti merenja koja odgovara $P'_a=0.5$, tj.

$$\text{Bias} = -0,010 - (-0,0124) = 0,0024$$

Ponovljivost se određuje pronalaženjem razlike R za referentne vrednosti merenja koje odgovaraju $P'_a=0,995$ i $P'_a=0,005$ i deljenjem sa 1,08:

$$R = \frac{-0,0084 - (-0,0163)}{1,08} = \frac{0,0079}{1,08} = 0,0073$$

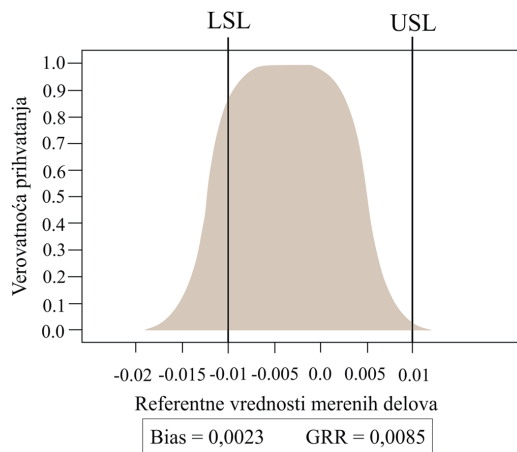
Zatim je $\sigma_{\text{ponovljivost}} = R/5,15 = 0,00142$ a pridruženi GRR raspon je 0,0085, slika 8.32.

Za određivanje da li bias statistički značajan određuje se t statistika:

$$t = \frac{6,075 \times |\text{bias}|}{\sigma_{\text{ponovljivost}}} = \frac{6,075 \times 0,0023}{0,00142} = 9,84$$

Pošto je $t_{0,025,19} = 2,093$, bias je statistički značajan i to se vidi i na osnovu p vrednosti na slici 8.32.

Levi deo krive performansi merila je prikazan u donjem desnom uglu slike 8.32. Za dobijanje desnog dela krive potrebno je ponoviti studiju za gornju granicu specifikacije (0,01). Pošto oblik krive na gornjoj granici treba da bude „slika u ogledalu“ krive na donjoj granici, jedino u obzir treba uzeti položaj krive u odnosu na X_T vrednosti. Ovaj položaj je određen preko biasa. Ispravan položaj krive treba da se definiše u tački gde je $P'_a=0,5$ i X_T vrednost jednaka specifikacijskom limitu minus bias. U ovom primeru, ova tačka treba da bude $X_T=0,010-0,0023=0,0077$. Kriva performansi merila je prikazana na slici 8.33.



Slika 8.33. Kriva performanse merila

LITERATURA

- [1] Abduljaleel, M., Midi, H., & Karimi, M. (2019). *Outlier Detection in the Analysis of Nested Gage R&R, Random Effect Model*. Statistics in Transition new series, 20(3), 31-56.
- [2] AIAG-Work Group. (2010). *Measurement systems analysis*. MSA 4th Edition–Reference manual,, Daimler Chrysler Corporation, Ford Motor Company, General Motors Corporation.
- [3] Al-Ahmari, A. M. A., & Aalam, J. (2015). *Optimizing parameters of freeform surface reconstruction using CMM*. Measurement, 64, 17-28.
- [4] Allen, T. T. (2019). *Software Overview and Methods Review: Minitab: Statistical Quality Control and Design of Experiments and Systems*, In book: Introduction to Engineering Statistics and Lean Six Sigma, 575-600.
- [5] Al-Qudah, S. K. (2017). *A study of the AIAG measurement system analysis (MSA) method for quality control*. Journal of Management & Engineering Integration, 10(2), 68-80.
- [6] Al-Refaie, A., & Bata, N. (2010). *Evaluating measurement and process capabilities by GR&R with four quality measures*. Measurement, 43(6), 842-851.
- [7] Antony, J., Gijo, E. V., & Childe, S. J. (2012). *Case study in Six Sigma methodology: manufacturing quality improvement and guidance for managers*. Production Planning & Control, 23(8), 624-640.
- [8] Aquila, G., Peruchi, R. S., Junior, P. R., Rocha, L. C. S., de Queiroz, A. R., de Oliveira Pamplona, E., & Balestrassi, P. P. (2018). *Analysis of the wind average speed in different Brazilian states using the nested GR&R measurement system*. Measurement, 115, 217-222.
- [9] Bangphan, S., Bangphan, P., & Boonkang, T. (2014). *Process Capability Analysis by Using Statistical Process Control of Rice Polished Cylinder Turning Practice*. International J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 8(12), 2037-2043.
- [10] Barini, E. M., Tosello, G., & De Chiffre, L. (2010). *Uncertainty analysis of point-by-point sampling complex surfaces using touch probe CMMs: DOE for complex surfaces verification with CMM*. Precision Engineering, 34(1), 16-21.
- [11] Blackburn, T. D. (2022). *Six Sigma: A Case Study Approach Using Minitab®*. Springer Nature.
- [12] Borror, C. M. (2007). *Response Surface Methodology and Related Topics*. Journal of Quality Technology, 39(3), 297.

- [13] Bower, K. M. (2000). *Analysis of Variance (ANOVA) using MINITAB*. Scientific Computing & Instrumentation, 17, 64-65.
- [14] Çakıroğlu, R., & Acır, A. (2013). *Optimization of cutting parameters on drill bit temperature in drilling by Taguchi method*. Measurement, 46(9), 3525-3531.
- [15] Cepova, L., Kovacikova, A., Cep, R., Klaput, P., & Mizera, O. (2018). *Measurement system analyses-gauge repeatability and reproducibility methods*. Measurement Science Review, 18(1), 20.
- [16] Cintas, P. G., Almagro, L. M., & Llabres, X. T. M. (2012). *Industrial statistics with Minitab*. John Wiley & Sons.
- [17] Dalalah, D., & Hani, D. B. (2016). A precision-to-tolerance ratio model for the assessment of measurements uncertainty. *Precision Engineering*, 44, 143-151.
- [18] Debnath, S., Reddy, M. M., & Yi, Q. S. (2016). *Influence of cutting fluid conditions and cutting parameters on surface roughness and tool wear in turning process using Taguchi method*. Measurement, 78, 111-119.
- [19] Duspara, M., Savković, B., Dudic, B., & Stoić, A. (2023). *Effective Detection of the Machinability of Stainless Steel from the Aspect of the Roughness of the Machined Surface*. Coatings, 13(2), 447.
- [20] Dutta, S., & Narala, S. K. R. (2021). *Optimizing turning parameters in the machining of AM alloy using Taguchi methodology*. Measurement, 169, 108340.
- [21] Feng, C. X. J., Saal, A. L., Salsbury, J. G., Ness, A. R., & Lin, G. C. (2007). *Design and analysis of experiments in CMM measurement uncertainty study*. Precision Engineering, 31(2), 94-101.
- [22] Ganapathy, S., Palanivendhan, M., Susitra, K., & Balasubramanian, P. (2022). *Optimization of machining parameters in EDM using Taguchi based grey relational analysis*. Materials Today: Proceedings. In Press
- [23] Garcia, A. C., & del Rio, A. G. (2013). *Number of distinct data categories and gage repeatability and reproducibility. A double (but single) requirement*. Measurement, 46(8), 2514-2518.
- [24] Ha, C., Kim, D. S., & Park, S. (2017). *Assessment of the adequacy of gauge repeatability and reproducibility study using a Monte Carlo simulation*. Mathematical Problems in Engineering.

- [25] Hadžistević, M., Štrbac, B., Spasić Jokić, V., Delić, M., Sekulić, M., & Hodolić, J. (2015). *Factors of estimating flatness error as a surface requirement of exploitation*. Metalurgija, 54(1), 239-242.
- [26] Havrlišan, S. (2017) *Stohastički pristup modeliranju i optimiranju procesa naštrcavanja pomoću plinskog plamena*, doktorska disertacija, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Slavonski Brod.
- [27] Havrlisan, S., Simunovic, K., & Vukelic, D. (2016). *Modeliranje procesa abrazijskog trošenja slojeva na bazi nikla primjenom planiranih pokusa*. Tehnički vjesnik, 23(6), 1687-1693.
- [28] Hinkelmann, K., & Kempthorne, O. (2007). *Design and analysis of experiments*, John Wiley & Sons.
- [29] Hodolić, J., Hadžistević, M., Tkač, M., Hajduova, Z. (2011) *Alati za statističko upravljanje kvalitetom*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
- [30] Hoffa, D. W., & Laux, C. (2007). *Gauge R&R: an effective methodology for determining the adequacy of a new measurement system for micron-level metrology*. Journal of Industrial Technology, 23(4).
- [31] Huang, M. L., Hung, Y. H., & Yang, Z. S. (2016). *Validation of a method using Taguchi, response surface, neural network, and genetic algorithm*. Measurement, 94, 284-294.
- [32] Janković, P., Mandić, M. (2020). *Osnove metrologije i analiza mernih sistema*. Mašinski fakultet, Niš.
- [33] Jotić, G., Štrbac, B., Toth, T., Blanuša, V., Dovica, M., & Hadžistević, M. (2023). *The Analysis of Metrological Characteristics of Different Coordinate Measuring Systems*. Tehnički vjesnik, 30(1), 32-38
- [34] Kenett, R. S., & Zacks, S. (2021). *Modern industrial statistics: With applications in R, MINITAB, and JMP*. John Wiley & Sons
- [35] Ketan, H., & Nassir, M. (2016). *Aluminium hot extrusion process capability improvement using Six Sigma*. Advances in Production Engineering & Management, 11(1).
- [36] Khan, R. M. (2013). *Problem solving and data analysis using minitab: A clear and easy guide to six sigma methodology*. John Wiley & Sons.
- [37] Kooshan, F. (2012). *Implementation of Measurement System Analysis System (MSA): In the Piston Ring Company" Case Study*. Int. J. Sci. Technol.
- [38] Kovač, P. (2016). *Metode planiranja i obrade eksperimenta*, Fakultet tehničkih nauka. Novi Sad.

- [39] Kumar, S. P., & Devadasan, S. R. *Standardization of Inspection Processes Incorporated in a Precision Machining Centre*. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE).
- [40] Laghari, R. A., Li, J., Xie, Z., & Wang, S. Q. (2018). *Modeling and optimization of tool wear and surface roughness in turning of Al/SiCp using response surface methodology*. 3D Research, 9(4), 1-13.
- [41] Lanc, Z., Štrbac, B., Zeljković, M., Živković, A., Hadžistević, M. *Emissivity of aluminium alloy using infrared thermography technique*. Mater. Tehnol, 52, 323-327
- [42] Lazarevic, D., Madic, M., Jankovic, P., & Lazarevic, A. (2012). *Cutting parameters optimization for surface roughness in turning operation of polyethylene (PE) using Taguchi method*. Tribology in industry, 34(2), 68.
- [43] Maat, S. M. (2015). *Exploring engineering technology students' perception in learning statistics using Minitab*. Mediterranean Journal of Social Sciences, 6(3), 823
- [44] Madić, M., Radovanović, M., Coteata, M., Janković, P., & Petković, D. (2015). *Multi-objective optimization of laser cutting using ROV-based Taguchi methodology*. In Applied Mechanics and Materials (Vol. 809, pp. 405-410). Trans Tech Publications Ltd.
- [45] Marques, R. A. M., Pereira, R. B. D., Peruchi, R. S., Brandão, L. C., Ferreira, J. R., & Davim, J. P. (2020). *Multivariate GR&R through factor analysis*. Measurement, 151, 107107.
- [46] Mia, M., Dey, P. R., Hossain, M. S., Arafat, M. T., Asaduzzaman, M., Ullah, M. S., & Zobaer, S. T. (2018). *Taguchi S/N based optimization of machining parameters for surface roughness, tool wear and material removal rate in hard turning under MQL cutting condition*. Measurement, 122, 380-391.
- [47] Stojković, M. (2001). *Statistika*. Ekonomski fakultet u Subotici.
- [48] Montgomery, D. C. (2017). *Design and analysis of experiments*. John Wiley & sons.
- [49] Myers, R. H., Montgomery, D. C., & Anderson-Cook, C. M. (2016). *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*. John Wiley & Sons.
- [50] Pan, J. (2014). *Minitab tutorials for design and analysis of experiments*. Retrieved August, 1, 2014.
- [51] Peruchi, R. S., Balestrassi, P. P., de Paiva, A. P., Ferreira, J. R., & de Santana Carmelossi, M. (2013). *A new multivariate gage R&R method for correlated characteristics*. International Journal of Production Economics, 144(1), 301-315.

- [52] Piratelli-Filho, A., & Di Giacomo, B. (2003). *CMM uncertainty analysis with factorial design*. Precision Engineering, 27(3), 283-288.
- [53] Pochampally, K. K., & Gupta, S. M. (2014). *Six sigma case studies with Minitab®*. CRC Press.
- [54] Potran, M., Štrbac, B., Puškar, T., Hadžistević, M., Hodolič, J., & Trifković, B. (2016). *Measurement of the accuracy of dental working casts using a coordinate measuring machine*. Vojnosanitetski pregled, 73(10), 895-903
- [55] Quirk, T. J., & Quirk, T. J. (2012). *One-way analysis of variance (ANOVA)*. Excel 2007 for Educational and Psychological Statistics: A Guide to Solving Practical Problems, 163-179.
- [56] Radlovački, V., Hadžistević, M., Štrbac, B., Delić, M., & Kamberović, B. (2016). *Evaluating minimum zone flatness error using new method—Bundle of plains through one point*. Precision Engineering, 43, 554-562.
- [57] Radovanović, M., Slatineanu, L., Janković, P., Petković, D., & Madić, M. (2015). *Taguchi Approach for the Optimization of Cutting Parameters in Finish Turning of Medical Stainless Steel*. In Applied Mechanics and Materials (Vol. 809, pp. 153-158). Trans Tech Publications Ltd.
- [58] Radziwill, N. (2014). *Six Sigma Case Studies with Minitab*. The Quality Management Journal, 21(3), 64.
- [59] Ranisavljev, M., & Štrbac, B. (2022). *Optimizacija procesa merenja na koordinatnoj mernoj mašini primenom Taguchi dizajna eksperimenta*. Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, 37(01), 4-7.
- [60] Rodić, D. (2019). *Optimizacija procesa elektroerozivne obrade savremenih inženjerskih materijala*, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad.
- [61] Rodic, D., Gostimirovic, M., Sekulic, M., Savkovic, B., & Strbac, B. (2022). *Investigation an assisting electrode powder mixed electrical discharge machining of nonconductive ceramic*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1-17.
- [62] Runje, B., Horvatić Novak, A. & Razumić, A. (2017) *Measurement system analysis in production process*. XVII International Scientific Conference on Industrial Systems (IS'17). Novi Sad.
- [63] Runje, B., Horvatic Novak, A., Razumic, A., Piljek, P., Strbac, B., & Orosnjak, M. (2019). *Evaluation of consumer and producer risk in conformity assessment decisions*. In Proceedings of the 30th DAAAM International Symposium (pp. 0054-0058).

- [64] Saikaew, C. (2018). *An implementation of measurement system analysis for assessment of machine and part variations in turning operation*. Measurement, 118, 246-252.
- [65] Sarıkaya, M., & Güllü, A. (2014). *Taguchi design and response surface methodology based analysis of machining parameters in CNC turning under MQL*. Journal of Cleaner Production, 65, 604-616.
- [66] Savkovic, B., Kovac, P., Dudic, B., & Gregus, M. (2022). *Decoding of Factorial Experimental Design Models Implemented in Production Process*. CMC-Computers Materials & Continua, 71(1), 1661-1675.
- [67] Savkovic, B., Kovac, P., Dudic, B., Gregus, M., Rodic, D., Strbac, B., & Ducic, N. (2019). *Comparative characteristics of ductile iron and austempered ductile iron modeled by neural network*. Materials, 12(18), 2864.
- [68] Savkovic, B., Kovac, P., Rodic, D., Strbac, B., & Klancnik, S. (2020). *Comparison of artificial neural network, fuzzy logic and genetic algorithm for cutting temperature and surface roughness prediction during the face milling process*. Adv. Prod. Eng. Manag, 15(2), 137-150.
- [69] Savković, B., Kovač, P., Stoić, A., & Dudić, B. (2020). *Optimization of machining parameters using the Taguchi and ANOVA analysis in the face milling of aluminum alloys Al7075*. Tehnički vjesnik, 27(4), 1221-1228.
- [70] Savković, B., Kovač, P., Štrbac, B., Pokusova, M., & Kulundžić, N. (2021). *Modelling of the High-Chromium Cast Iron Surface Roughness*. In Digital Conversion on the Way to Industry 4.0: Selected Papers from ISPR2020, September 24-26, 2020 Online-Turkey (pp. 523-534). Springer International Publishing.
- [71] Sawyer, S. F. (2009). *Analysis of variance: the fundamental concepts*. Journal of Manual & Manipulative Therapy, 17(2), 27E-38E.
- [72] Sekulic, M., Kovac, P., Gostimirovic, M., & Kramar, D. (2013). *Optimization of high-pressure jet assisted turning process by Taguchi method*. Advances in Production Engineering & Management, 8(1), 5.
- [73] Šimunović, K. & Havrlišan, S. (2019) *Planiranje i analiza pokusa*. Slavonski Brod. Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu.
- [74] Simunovic, K., Simunovic, G., & Saric, T. (2015). *Single and multiple goal optimization of structural steel face milling process considering different methods of cooling/lubricating*. Journal of Cleaner Production, 94, 321-329.

- [75] Singh, R., Umrao, R. K., Ahmad, M., Ansari, M. K., Sharma, L. K., & Singh, T. N. (2017). *Prediction of geomechanical parameters using soft computing and multiple regression approach*. Measurement, 99, 108-119.
- [76] Stankov, J. (1982). *Osnove merne tehnike: Metode planiranja eksperimenata*. Fakultet tehničkih nauka, OOUR Naučno-obrazovni institut za proizvodno mašinstvo, Novi Sad.
- [77] Štrbac, B. (2017). *Procena merne nesigurnosti pri merenju ravnosti na koordinatnoj mernoj mašini primenom Monte Karlo simulacije*. Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad.
- [78] Štrbac, B., Ačko, B., Havrlišan, S., Matin, I., Savković, B., & Hadžistević, M. (2020). *Investigation of the effect of temperature and other significant factors on systematic error and measurement uncertainty in CMM measurements by applying design of experiments*. Measurement, 158, 107692.
- [79] Štrbac, B., Hadžistević, M., Runje, B., Novak, A. H., Matin, I., & Jotić, G. (2020). *The Analysis Of The Accuracy And Evaluation Measurement Uncertainty of CMM Using Ball Bar*. Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara, 18(3), 137-141.
- [80] Strbac, B., Hadzistevic, M., Vrba, I., Radlovacki, V., & Hodolic, J. (2011). *Analysis of Influencing Factors on Stylus Calibration of CMM*. Annals of DAAAM & Proceedings.
- [81] Štrbac, B., Mikó, B., Rodić, D., Nagy, J., & Hadžistević, M. (2020). *Analysis of characteristics of non-commercial software systems for assessing flatness error by means of minimum zone method*. Tehnički vjesnik, 27(2), 535-541.
- [82] Štrbac, B., Radlovački, V., Spasić-Jokić, V., Delić, M., & Hadžistević, M. (2017). *The difference between GUM and ISO/TC 15530-3 method to evaluate the measurement uncertainty of flatness by a CMM*. Mapan, 32, 251-257.
- [83] Štrbac, B., Ranisavljev, M., Zeljković, M., Knežev, M., & Hadžistević, M. (2021). *Supplement to the Standard VDI/DGQ 3442 with Gage R&R Study*. In New Technologies, Development and Application IV (pp. 350-356). Cham: Springer International Publishing.
- [84] Štrbac, B., Rodić, D., Delić, M., Savković, B., & Hadžistević, M. (2021). *Investigation of Functional Dependency between the Characteristics of the Machining Process and Flatness Error Measured on a CMM*. Measurement Science Review, 21(6), 158-167.
- [85] Suhail, A. H., Ismail, N., Wong, S. V., & Jalil, N. A. (2010). *Optimization of cutting parameters based on surface roughness and assistance of workpiece surface temperature in turning process*. American journal of engineering and applied sciences, 3(1), 102-108.
- [86] Urdhwaresh, H. (2006). *Validating measurement system using measurement systems analysis (MSA)*. Quality World, 41-47

- [87] Vrba, I., Palencar, R., Hadzistevec, M., Strbac, B., Spasic-Jokic, V., & Hodolic, J. (2015). *Different approaches in uncertainty evaluation for measurement of complex surfaces using coordinate measuring machine*. Measurement science review, 15(3), 111-118.
- [88] Wu, W. P. (2008). *Investigation of the effects of face-milling parameters of ultra-large-scale plane on milling quality*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 37(3), 241-249.

PRILOG I – *F* RASPODELA

F raspodela za $\alpha=0,05$

/	$df_1=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$df_2=1$	161,4476	199,5000	215,7073	224,5832	230,1619	233,9860	236,7684	238,8827	240,5433
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,371	19,3848
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,459	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,494	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,369	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,21	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,196	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236
29	4,183	3,3277	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2899	2,175	2,0868	2,0164	1,9588
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

F raspodela za $\alpha=0,05$ - nastavak

/	$df_1=10$	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$df_2=1$	161,4476	199,5	215,7073	224,5832	230,1619	233,986	236,7684	238,8827	240,5433	241,8817
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,371	19,3848	19,3959
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	4,06	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6689
7	3,6365	3,5747	3,5107	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2839	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9782	2,913	2,845	2,774	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,609	2,5705	2,5309	2,4901	2,448	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,341	2,2962
13	2,671	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6022	2,5342	2,463	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2229	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4034	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,104	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,308	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9795	1,9302	1,878
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,321	2,2504	2,1757	2,096	2,054	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,938	1,8894	1,838	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	2,005	1,9605	1,9139	1,8648	1,8128	1,757
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,939	1,892	1,8424	1,7896	1,733
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,711
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,901	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7306	1,6717
28	2,19	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6376
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,748	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,429	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,394	1,318	1,2214	1

F raspodela za $\alpha=0,01$

/	<i>df</i> ₁ =1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>df</i> ₂ =1	4052,181	4999,5	5403,352	5624,583	5763,65	5858,986	5928,356	5981,07	6022,473
2	98,503	99	99,166	99,249	99,299	99,333	99,356	99,374	99,388
3	34,116	30,817	29,457	28,71	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345
4	21,198	18	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659
5	16,258	13,274	12,06	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158
6	13,745	10,925	9,78	9,148	8,746	8,466	8,26	8,102	7,976
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,46	7,191	6,993	6,84	6,719
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,2	5,057	4,942
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,744	4,632
12	9,33	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,64	4,499	4,388
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,62	4,441	4,302	4,191
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,14	4,03
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,004	3,895
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,89	3,78
17	8,4	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597
19	8,185	5,926	5,01	4,5	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457
21	8,017	5,78	4,874	4,369	4,042	3,812	3,64	3,506	3,398
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,71	3,539	3,406	3,299
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256
25	7,77	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217
26	7,721	5,526	4,637	4,14	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,12
29	7,598	5,42	4,538	4,045	3,725	3,499	3,33	3,198	3,092
30	7,562	5,39	4,51	4,018	3,699	3,473	3,304	3,173	3,067
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,718
120	6,851	4,787	3,949	3,48	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407

F raspodela za $\alpha=0.01$ - nastavak

/	<i>df</i> =10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
<i>df</i> =1	6055,847	6106,321	6157,285	6208,73	6234,631	6260,649	6286,782	6313,03	6339,391	6365,864
2	99,399	99,416	99,433	99,449	99,458	99,466	99,474	99,482	99,491	99,499
3	27,229	27,052	26,872	26,69	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	14,546	14,374	14,198	14,02	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
5	10,051	9,888	9,722	9,553	9,466	9,379	9,291	9,202	9,112	9,02
6	7,874	7,718	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,88
7	6,62	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,65
8	5,814	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
9	5,257	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
10	4,849	4,706	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,996	3,909
11	4,539	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,86	3,776	3,69	3,602
12	4,296	4,155	4,01	3,858	3,78	3,701	3,619	3,535	3,449	3,361
13	4,1	3,96	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,341	3,255	3,165
14	3,939	3,8	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
15	3,805	3,666	3,522	3,372	3,294	3,214	3,132	3,047	2,959	2,868
16	3,691	3,553	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
17	3,593	3,455	3,312	3,162	3,084	3,003	2,92	2,835	2,746	2,653
18	3,508	3,371	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,66	2,566
19	3,434	3,297	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,674	2,584	2,489
20	3,368	3,231	3,088	2,938	2,859	2,778	2,695	2,608	2,517	2,421
21	3,31	3,173	3,03	2,88	2,801	2,72	2,636	2,548	2,457	2,36
22	3,258	3,121	2,978	2,827	2,749	2,667	2,583	2,495	2,403	2,305
23	3,211	3,074	2,931	2,781	2,702	2,62	2,535	2,447	2,354	2,256
24	3,168	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,403	2,31	2,211
25	3,129	2,993	2,85	2,699	2,62	2,538	2,453	2,364	2,27	2,169
26	3,094	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,131
27	3,062	2,926	2,783	2,632	2,552	2,47	2,384	2,294	2,198	2,097
28	3,032	2,896	2,753	2,602	2,522	2,44	2,354	2,263	2,167	2,064
29	3,005	2,868	2,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,234	2,138	2,034
30	2,979	2,843	2,7	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	2,801	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	2,632	2,496	2,352	2,198	2,115	2,028	1,936	1,836	1,726	1,601
120	2,472	2,336	2,192	2,035	1,95	1,86	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	2,321	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1

PRILOG II – T RASPODELA

df	$\alpha=0,1$	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
∞	$t_{\alpha}=1,282$	1,645	1,96	2,326	2,576	3,091	3,291
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,328	31,6
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,61
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93	4,318
13	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,14
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,5	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,45	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,66
30	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,385	3,646
60	1,296	1,671	2	2,39	2,66	3,232	3,46
120	1,289	1,658	1,98	2,358	2,617	3,16	3,373
∞	1,282	1,645	1,96	2,326	2,576	3,091	3,291

PRILOG III – D₂^{*} TABELA

Veličina podgrupe (<i>m</i>)										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Broj podgrupa (g)	1	1,0 1,41421	2,0 1,91155	2,9 2,23887	3,8 2,48124	4,7 2,67253	5,5 2,82981	6,3 2,96288	7,0 3,07794	8,3 3,17905
	2	1,9 1,27931	3,8 1,80538	5,7 2,15069	7,5 2,40484	9,2 2,60438	10,8 2,76779	12,3 2,90562	13,8 3,02446	15,1 3,12869
	3	2,8 1,23105	5,7 1,76858	8,4 2,12049	11,1 2,37883	13,6 2,58127	16,0 2,74681	18,3 2,88628	20,5 3,00643	24,6 3,11173
	4	3,7 1,20621	7,5 1,74989	11,2 2,10522	14,7 2,36571	18,1 2,56964	21,3 2,73626	24,4 2,87656	27,3 2,99737	30,1 3,10321
	5	4,6 1,19105	9,3 1,17857	13,9 2,09601	18,4 2,35781	22,6 2,56263	26,6 2,72991	30,4 2,87071	34,0 2,99192	40,8 3,09808
	6	5,5 1,18083	11,1 1,73099	16,7 2,08985	22,0 2,35253	27,0 2,55795	31,8 2,72567	36,4 2,86680	40,8 2,98829	45,0 3,09467
	7	6,4 1,17348	12,9 1,72555	19,4 2,08543	25,6 2,34875	31,5 2,55460	37,1 2,72263	42,5 2,86401	47,6 2,98568	52,4 3,09222
	8	7,2 1,16794	14,8 1,72147	22,1 2,08212	29,2 2,34591	36,0 2,55208	42,4 2,72036	48,5 2,86192	54,3 2,98373	59,9 3,09039
	9	8,1 1,16361	16,6 1,71828	24,9 2,07953	32,9 2,34370	40,4 2,55013	47,7 2,71858	54,5 2,86028	61,1 2,98221	67,3 3,08896
	10	9,0 1,16014	18,4 1,71573	27,6 2,07746	36,5 2,34192	44,9 2,54856	52,9 2,71717	60,6 2,85898	67,8 2,98100	74,8 3,08781
	11	9,9 1,15729	20,2 1,71363	30,4 2,07577	40,1 2,34048	49,4 2,54728	58,2 2,71600	66,6 2,85791	74,6 2,98000	82,2 3,08688
	12	10,7 1,15490	22,0 1,71189	33,1 2,07436	43,7 2,33927	53,8 2,54621	63,5 2,71600	72,6 2,85702	81,3 2,97917	89,7 3,08610
	13	11,6 1,15289	23,8 1,71041	35,8 2,07316	47,3 2,33824	58,3 2,54530	68,7 2,71422	78,6 2,85627	88,1 2,97847	97,1 3,08544
	14	12,5 1,15115	25,7 1,70914	38,6 2,07213	51,0 2,33737	62,8 2,54452	74,0 2,71351	84,7 2,85562	94,9 2,97787	104,6 3,08487
	15	13,4 1,14965	27,5 1,70804	41,3 2,07125	54,6 2,33661	67,2 2,54385	79,3 2,71290	90,7 2,85562	101,6 2,97735	112,1 3,08438
	16	14,3 1,14833	29,3 1,70708	44,1 2,07047	58,2 2,33594	71,7 2,54326	84,5 2,71237	96,7 2,85457	108,4 2,97689	119,5 3,08395
	17	15,1 1,14717	31,1 1,70623	46,8 2,06978	61,8 2,33535	76,2 2,54274	89,8 2,71190	102,8 2,85413	115,1 2,97649	127,0 3,08358
	18	16,0 1,14613	32,9 1,70547	49,5 2,06917	65,5 2,33483	80,6 2,54228	95,1 2,71148	108,8 2,85375	121,9 2,97613	134,4 3,08324
	19	16,9 1,14520	34,7 1,70480	52,3 2,06862	69,1 2,33436	85,1 2,54187	100,3 2,71111	114,8 2,85341	128,7 2,97581	141,9 3,08294
	20	17,8 1,14437	36,5 1,70419	55,0 2,06813	72,7 2,33394	89,6 2,54149	105,6 2,71077	120,9 2,85310	135,4 2,97552	149,3 3,08267
<i>d₂</i>		1,12838	1,69257	2,05875	2,32593	2,53441	2,70436	2,8472	2,97003	3,07751

<i>cd</i>	0,876	1,815	2,7378	3,623	4,4658	5,2673	6,0305	6,7582	7,4539	8,1207
-----------	-------	-------	--------	-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

		Veličina podgrupe (<i>m</i>)								
		12	13	14	15	16	17	18	19	20
Broj podgrupa (<i>g</i>)	1	9,0 3,35016	9,6 3,42378	10,2 3,49116	10,8 3,55333	11,3 3,61071	11,9 3,66422	12,4 3,71424	12,9 3,76118	13,4 3,80537
	2	17,8 3,30463	19 3,38017	20,2 3,44922	21,3 3,51287	22,4 3,57156	23,5 3,62625	24,5 3,67734	25,5 3,72524	26,5 3,77032
	3	26,5 3,28931	28,4 3,3655	30,1 3,43512	31,9 3,49927	33,5 3,55842	35,1 3,61351	36,7 3,66495	38,2 3,71319	39,7 3,75857
	4	35,3 3,28163	37,7 3,35815	40,1 3,42805	42,4 3,49246	44,6 3,55183	46,7 3,60712	48,8 3,65875	50,8 3,70715	52,8 3,75268
	5	44 3,27701	47,1 3,35372	50,1 3,42381	52,9 3,48836	55,7 3,54787	58,4 3,60328	61,0 3,65502	63,5 3,70352	65,9 3,74914
	6	52,8 3,27392	56,5 3,35077	60,1 3,42097	63,5 3,48563	66,8 3,54522	70,0 3,60072	73,1 3,65253	76,1 3,70109	79,1 3,74678
	7	61,6 3,27172	65,9 3,34866	70,0 3,41894	74,0 3,48368	77,9 3,54333	81,6 3,59888	85,3 3,65075	88,8 3,69936	92,2 3,74509
	8	70,3 3,27006	75,2 3,34708	80,0 3,41742	84,6 3,48221	89,0 3,54192	93,3 3,59751	97,4 3,64941	101,4 3,69806	105,3 3,74382
	9	79,1 3,26878	84,6 3,34585	90,0 3,41624	95,1 3,48107	100,1 3,54081	104,9 3,59644	109,5 3,64838	114,1 3,69705	118,5 3,74284
	10	87,9 3,26775	94 3,34486	99,9 3,41529	105,6 3,48016	111,2 3,53993	116,5 3,59559	121,7 3,64755	126,7 3,69625	131,6 3,74205
	11	96,6 3,2669	103,4 3,34406	109,9 3,41452	116,2 3,47941	122,3 3,53921	128,1 3,59489	133,8 3,64687	139,4 3,69558	144,7 3,74141
	12	105,4 3,2662	112,7 3,34339	119,9 3,41384	126,7 3,47879	133,3 3,53861	139,8 3,59430	146,0 3,64630	152,0 3,69503	157,9 3,74087
	13	114,1 3,26561	122,1 3,34282	129,8 3,41333	137,3 3,47826	144,4 3,53810	151,4 3,59381	158,1 3,64582	164,7 3,69457	171,0 3,74041
	14	122,9 3,2651	131,5 3,34233	139,8 3,41286	147,8 3,47781	155,5 3,53766	163,0 3,59339	170,3 3,64541	177,3 3,69417	184,2 3,74002
	15	131,7 3,26465	140,9 3,34191	149,8 3,41245	158,3 3,47742	166,6 3,53728	174,6 3,59302	182,4 3,64505	190,0 3,69382	197,3 3,73969
	16	140,4 3,26427	150,2 3,34154	159,7 3,41210	168,9 3,47707	177,7 3,53695	186,3 3,59270	194,6 3,64474	202,6 3,69351	210,4 3,73939
	17	149,2 3,26393	159,6 3,34121	169,7 3,41178	179,4 3,47677	188,8 3,53666	197,9 3,59242	206,7 3,64447	215,2 3,69351	223,6 3,73913
	18	157,9 3,26362	169 3,34092	179,7 3,41150	190,0 3,47650	199,9 3,53640	209,5 3,59216	218,8 3,64422	227,9 3,69301	236,7 3,73890
	19	166,7 3,26335	178,4 3,34066	189,6 3,41125	200,5 3,47626	211,0 3,53617	221,1 3,59194	231,0 3,64400	240,5 3,69280	249,8 3,73869
	20	175,5 3,26311	187,8 3,34042	199,6 3,41103	211,0 3,47605	222,1 3,53596	232,8 3,59174	243,1 3,64380	253,2 3,69260	263,0 3,73850
<i>d₂</i>		3,25846	3,33598	3,40676	3,47193	3,53198	3,58788	3,64006	3,68896	3,735
<i>cd</i>		8,7602	9,3751	9,9679	10,5396	11,0913	11,6259	12,144	12,6468	13,1362

